

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Claude PECKER

1^{re} THÈSE : Contribution à la théorie du type spectral.

2^e THÈSE : La spectroscopie dans le domaine des ondes
hertziennes et la structure du noyau.

Soutenues le 13 mai 1950 devant la Commission d'Examen :

MM. DANJON, *Président.*

CROZE
KASTLER } *Examineurs*

SERVICE DES PUBLICATIONS DU C. N. R. S.

13, Quai Anatole France

PARIS 7^e

1950

ERRATA

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TYPE SPECTRAL

par Jean-Claude PECKER

Un certain nombre d'erreurs dans le texte publié aux *Annales d'Astrophysique*, ont été signalées, pour les lecteurs de cette revue, dans le fascicule 2 du tome 14, p. 249. Une partie d'entre elles sont corrigées dans le texte ci-joint. Toutefois, il est nécessaire de tenir compte des erreurs ci-dessous, dont on voudra bien excuser l'auteur.

au lieu de :	lire :	page	
S_{2pN}	S_{2pV}	12	ligne 2, formule.
K^v	K_v	18	ligne 3 avant la fin.
$y - (\lambda - 1)y' - \lambda y''$	$y = (\lambda - 1)y' - \lambda y''$	31	figure 1.
σT^4	$\frac{\sigma}{\pi} T^4$	53	figure 16.
"métaux"	"éléments autres que H et He"	53, 54	passim.
$\bar{\kappa}_R, \kappa_v$	$(\bar{\kappa} + \sigma)_R; \kappa_v + \sigma$	54	formule 12, 1 ^{re} ligne.
$\bar{\kappa}_R, \kappa_{vi}$	$(\bar{\kappa} + \sigma)_R; \kappa_{vi} + \sigma$	56	formule 17, 1 ^{re} ligne.
$[1 - B]_2$	$[\bar{1} - B]_2$	61	figure 6, légende.
τ	τ'	79	formule 38, limite supérieure de l'intégrale et en indice à v dans la 1 ^{re} parenthèse du 2 ^o membre.
$w(\tau)$	$W(\tau)$	112, 113,	paragraphes 7 et 9, passim.
$w(0)$	$W(0)$	114, 115	
w	W	115	paragraphe 10, ligne 8.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552427_0006

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Jean-Claude PECKER

1^{re} THÈSE : Contribution à la théorie du type spectral.

2^e THÈSE : La spectroscopie dans le domaine des ondes
hertziennes et la structure du noyau.

Soutenues le 13 mai 1950 devant la Commission d'Examen :

MM. DANJON, *Président.*

CROZE

KASTLER

} *Examineurs*

SERVICE DES PUBLICATIONS DU C. N. R. S

13, Quai Anatole France

PARIS 7^e

1950

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen. M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	PIVETEAU.	T	Géologie.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions et Topologie.	ROCARD	T	Physique.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	H. CARTAN	T	Calcul différentiel.
E. DARMOIS.	T	Enseignement de Physique.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	LAFFITE	T	Chimie (P. C. B.).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	FAVARD.		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
Ch. JACOB	T	Géologie.	COULOMB	T	Physique du globe.
P. PASCAL	T	Chimie générale.	M ^{lle} COUSIN.	T	Biologie animale (P. C. B.).
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	CHRÉTIEN.		Chimie (P.C.B.).
FOCH.	T	Mécanique physique et expérimentale.	DRACH		Zoologie.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	KASTLER.		Physique.
Louis DE BROGLIE.	T	Théories physiques.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
JOB	T	Chimie générale.	EPHRUSSI.	T	Génétique.
PRENANT.	T	Anatomie et Histologie comparées.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
COMEES.	T	Physiologie végétale.	BAUER.	T	Chimie-Physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	RIVIÈRE		Géologie (P.C.B.).
Joseph PÉRÈS.	T	Mécanique rationnelle.	GAUTHERET.		Biologie Végétale (P.C.B.).
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	LUCAS.		Physique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	A. THOMAS		Évolutions des êtres organisés.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	ARNULF		Optique appliquée.
M. CURIE.	T	Physique (P. C. B.).	MAX MORAND.		Physique.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	SOLEILLET		Physique.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	DANJON	T	Astronomie.
DUPONT	T	Théories chimiques.	FRÉMAGET		Chimie Biologique.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	LAPORTE.		Physique générale et Radio-activité.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	JANET		Mathématiques générales.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.	PETIT	T	Biologie maritime.
G. DARMOIS.	T	Mathématiques générales.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
Jacques BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.	GALLIEN		Biologie animale (P.C.B.).
ACBEL.	T	Chimie biologique.	EICHHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
M ^{me} JOLIO-CURIE.	T	Physique générale et Radio-activité.	DE CURNAC.		Biologie végétale (P.C.B.).
PLANTEFOL	T	Botanique.	LAVAL		Physique (P.C.B.).
CABANNES.	T	Recherches physiques.	M ^{lle} CAUCHOIS.		Chimie-Physique.
GRASSÉ.	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	THELLIER.		Physique du Globe.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	AUDUBERT		Électrochimie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	L'HÉRITIER.		Génétique.
CHAUDRON	T	Chimie.	JUNG.		Pétrographie.
WYART.	T	Minéralogie.	TRILLAT.		Physique (P. C. B.).
TEISSIER	T	Zoologie.	WIEMANN.		Chimie (P. C. B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale	LICHNEROWICZ.		Mathématiques.
P. AUGER.	T	Physique quantique et relativité.	JACQUINOT		Physique (P. C. B.).
MONNIER		Physiologie générale.	VASSY		Physique de l'Atmosphère.
			DESTOUCHES.		Théories Physiques.
			GRIVET.	T	Radio Électricité.
			PONCIN		Mécanique des fluides.
			THIRY	T	Mécanique appliquée.
			DUBREIL		Mathématiques générales.
			QUELET.		Chimie (P. C. B.).
			CAGNIARD.		Géophysique appliquée.
			CHAMPETIER.		Chimie appliquée.
			CUVILLIER.		Géologie structurale et Géologie appliquée.

Secrétaire. Ch. MONIER.



CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TYPE SPECTRAL ⁽¹⁾.

I. — Introduction générale. — La construction des modèles d'atmosphères.

par Jean-Claude PECKER
(Institut d'Astrophysique, Paris)

SOMMAIRE. — Dans une introduction générale aux différents chapitres de cette étude, l'auteur rappelle que l'interprétation des spectres stellaires (théorie du type spectral) nécessite la solution de deux problèmes essentiels : la construction des modèles d'atmosphères, le calcul des raies spectrales.

Le chapitre I est consacré au premier de ces problèmes. Après avoir rappelé les hypothèses de départ (équilibre radiatif, équilibre thermodynamique local, équilibre hydrostatique...), on établit les équations qui expriment ces conditions dans le cas très général où l'atmosphère considérée absorbe et diffuse le rayonnement d'une façon quelconque.

Les méthodes de résolution de ces équations proposées dans le cas gris (coefficient d'absorption indépendant de la fréquence) par CHANDRASEKHAR, et KOURGANOFF sont exposées rapidement et discutées.

Dans le cas réel (le coefficient d'absorption est une fonction donnée de la fréquence) les méthodes proposées par différents auteurs (CHANDRASEKHAR, KOURGANOFF, STRÖMGREN) sont exposées dans le cas général où les équations d'équilibre ont été écrites (absorption et diffusion suivant une loi quelconque) et ces méthodes sont discutées.

A la suite de cette discussion, on a rassemblé les formules permettant de calculer le flux, l'intensité moyenne, et la pression de radiation. Les tables établies par KOURGANOFF et par STRÖMGREN pour le calcul des deux premières grandeurs sont étendues au calcul de la pression de radiation.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les recherches exposées dans ce travail s'inscrivent dans le cadre général de la théorie des atmosphères stellaires ; il nous semble utile de montrer d'abord ce que cette théorie nous permettra de déduire des faits expérimentaux.

1. — Les observations sont de deux sortes :

a) Observations relatives au rayonnement de l'étoile et dépendant de la distance de l'étoile à la terre :

magnitude apparente (visuelle, ou photométrique)

dans un certain nombre de cas, la *parallaxe* (c'est-à-dire, après une simple transformation, la distance d de l'étoile à la terre) ;

quelquefois, dans le cas de certains systèmes multiples, la *masse* M ;

et dans des cas exceptionnels (10 étoiles), le *rayon* R de l'étoile (mesuré au moyen de l'interféromètre de MICHELSON).

b) *Critères spectraux* de tous ordres : ce sont des données intrinsèques qui ne dépendent pas de la distance Terre-Étoile.

⁽¹⁾ Ce travail est divisé en 5 parties (ou chapitres) que nous désignerons dans la suite par les abréviations TS1, TS2, TS3, TS4, TS5.

2. — Que cherchons-nous à déduire de ces observations ?

En vue d'études statistiques, un classement grossier des étoiles en « types » et « classes » est suffisant.

Pour des études plus précises de la structure interne de l'étoile, il est nécessaire de connaître de façon exacte les valeurs L , M , R de la luminosité, de la masse, du rayon, ainsi que la composition chimique de l'étoile. Cependant, pour une étude du diagramme de RUSSELL-HERTZPRUNG (diagramme à deux variables), la connaissance de la gravité g et de la température effective T_e sera suffisante. Rappelons que :

$$g = \frac{M}{R^2} G \qquad T_e^4 = \frac{L}{4\pi R^2 \sigma}.$$

où G est la constante de la gravitation, et σ la constante de STEFAN.

3. — Dans le cas où nous avons pour but des recherches statistiques, certaines relations empiriques pourront être utilisées ; ces relations ont été déterminées à l'aide d'un petit nombre d'étoiles bien connues, entre lesquelles nous « interpolons » les étoiles étudiées.

Ainsi, la connaissance du type spectral entraîne la connaissance de la *température effective* T_e , de la *parallaxe spectroscopique* ; la magnitude visuelle apparente d'une étoile pourra permettre de connaître la *luminosité* L , à condition de connaître la *correction bolométrique* et la parallaxe. Cette correction bolométrique peut se déduire du type spectral au moyen d'une relation empirique (étoiles froides) ou théorique (étoiles chaudes) [17].

Enfin, la relation empirique *masse-luminosité* permettra de calculer la *masse* de l'étoile.

La détermination approchée de la *magnitude absolue* pourra être faite également, en utilisant deux groupes de critères spectraux, l'un fixant la classe de luminosité, l'autre, le type spectral, c'est-à-dire, en première approximation, la gravité et la température effective. Plusieurs systèmes ont été proposés ; citons ceux de BARBIER-CANAVAGGIA-CHALONGE [2] et ceux de MORGAN-KEENAN-KELLMANN [23].

Remarquons que le choix des critères spectraux n'est pas arbitraire. Ces critères dépendent naturellement de T_e et g mais aussi, par exemple, de la composition chimique. Il faudrait qu'ils en dépendent aussi peu que possible afin d'opérer d'emblée une « séparation des variables ». Des critères utilisant le spectre d'un seul élément seraient particulièrement bien adaptés : c'est peut-être le cas de ceux qu'ont choisi BARBIER-CANAVAGGIA-CHALONGE : position et grandeur de la discontinuité de BALMER, quoique ces critères dépendent aussi de l'abondance d'hydrogène.

4. — On sait (théorème de VOGT-RUSSELL) que la luminosité L , la masse M et le rayon R suffisent à définir une étoile en son état actuel.

Nous voudrions pouvoir les calculer sans utiliser aucune relation empirique.

Si l'on sait déduire des critères spectraux la gravité g et la température

effective T_e et si, de plus, on connaît la distance de l'étoile, sa magnitude apparente et la correction bolométrique, on pourra calculer L , M , R .

Notre but sera alors de calculer, à partir des données de l'expérience, les grandeurs g et T_e (ainsi d'ailleurs que la correction bolométrique). Nous aurons pour cela deux problèmes principaux à résoudre :

a) Calcul de la répartition des grandeurs physiques (température, pression, etc...) dans une atmosphère définie par T_e , g , et la composition chimique : c'est la théorie des *modèles d'atmosphère* (à laquelle il faut rattacher la théorie du « *blanketing effect* »).

b) Calcul des caractères spectraux d'une étoile pour laquelle on connaît un modèle : *Théorie de l'intensité* des raies fortes dans un spectre stellaire.

Il sera alors possible d'établir une relation bi-univoque entre le groupe des critères spectraux d'une part et le groupe des données (g , T_e , composition) d'autre part. La recherche de cette relation, c'est-à-dire l'étude des deux problèmes énoncés ci-dessus, constitue l'objet du présent travail. Les solutions fournies ne doivent pas être considérées comme définitives, mais elles constituent une première approximation convenable.

5. — Le plan détaillé de notre étude est le suivant :

Dans le *chapitre I* (« *La construction des modèles stellaires* ») nous rappelons brièvement les hypothèses de base, les équations d'équilibre, l'expression de la conservation du flux, et nous les généralisons dans un assez large domaine.

Différentes méthodes de résolution des équations d'équilibre sont énoncées et discutées dans les cas *gris* et *non-gris* (c'est-à-dire lorsque le coefficient d'absorption est indépendant de la longueur d'onde et lorsqu'il en dépend).

Enfin, les formules permettant le calcul du flux, de l'intensité moyenne et de la pression de radiation sont rappelées et généralisées. Des tables permettant le calcul de la pression de radiation sont données.

La construction des modèles gris est étudiée dans le chapitre II.

Dans le *chapitre II* (« *La polarisation par les électrons libres et le type spectral* ») la polarisation par les électrons libres est calculée par la méthode de CHANDRASEKHAR, dans le cas très général où l'absorption et la diffusion interviennent simultanément dans le transfert du rayonnement.

On peut mettre en évidence certaines imperfections très générales de la méthode de CHANDRASEKHAR.

Il est également possible de retrouver quantitativement la valeur de la polarisation mesurée par LYOT sur le disque solaire et d'établir une relation entre la polarisation et le type spectral.

La construction de modèles non-gris est étudiée dans le *chapitre III* (« *Construction d'un modèle d'étoile B* »).

Les tables d'ionisation et d'absorption sont construites pour permettre le

calcul de modèles d'étoiles B, pour quatre compositions chimiques différentes et un assez large domaine de pressions, de longueurs d'onde et de températures. Ces tables seront publiées séparément.

Deux modèles — correspondant à deux étoiles B_1 et $B_{1,5}$ d'hydrogène pur — sont construits. On en déduit le flux sortant, la correction bolométrique, les températures de couleur, de brillance..., de ces étoiles.

La méthode utilisée est comparée, dans ses détails, avec d'autres méthodes.

La théorie du type spectral est achevée dans le chapitre IV par « *Le calcul de la largeur des raies d'absorption* ».

Une méthode de calcul de la largeur équivalente des fortes raies d'absorption est proposée. Cette méthode est appliquée dans le cas solaire à la discussion des mesures d'assombrissement dans les raies, aux déterminations d'abondances, à la construction des courbes de croissance, et, dans le cas stellaire, à l'établissement de formules permettant le calcul du type spectral.

Enfin, dans le chapitre V (« *L'effet de blanketing et la structure de l'atmosphère solaire* ») :

La méthode introduite dans le chapitre IV est appliquée à l'étude de la variation avec la profondeur des diverses raies que l'on peut trouver dans le spectre solaire. On peut en déduire la correction qu'il est nécessaire d'apporter à un modèle qu'on aurait calculé en ne tenant compte que de l'absorption continue.

Les différentes méthodes de construction d'un modèle solaire à partir de la donnée de l'assombrissement dans le spectre continu sont ensuite discutées.

Pour conclure ce chapitre, il est proposé un modèle solaire convenable qui tienne compte à la fois des données de l'expérience et de nos connaissances théoriques sur l'équilibre radiatif.

6. — La plus grande partie de ce travail a été accomplie grâce à une bourse du C. N. R. S. De plus, un échange d'astronomes, financé par l'U. N. E. S. C. O., sous l'égide de l'U. A. I., m'a permis de séjourner à l'observatoire d'Utrecht ; j'ai également passé deux mois à l'observatoire de Copenhague, grâce à une subvention du C. N. R. S. Qu'il me soit permis de remercier ici :

M. M. MINNAERT, Directeur de l'Observatoire d'Utrecht, qui m'a initié avec bienveillance, pendant mon séjour aux Pays-Bas (juin-octobre 1948), aux questions expérimentales et théoriques concernant les raies spectrales.

M. B. STRÖMGREN, Directeur de l'Observatoire de Copenhague, pour ses aimables conseils pendant mon séjour au Danemark (septembre-octobre 1949).

M. A. DANJON, Directeur de l'Observatoire de Paris, qui m'a accueilli dans son Observatoire et qui a suivi mes recherches avec bienveillance.

M. H. MINEUR, Directeur de l'Institut d'Astrophysique de Paris, où le présent travail a été effectué, qui a mis à ma disposition les ressources du bureau de calcul de l'I. A. P.

M. D. CHALONGE, qui m'a initié au travail expérimental de spectrophotométrie et dont les conseils m'ont été si utiles.

M. D. BARBIER avec qui j'ai eu tant de stimulants entretiens.

M. B. LYOT, qui a bien voulu présenter certaines de mes notes aux comptes rendus de l'Académie des Sciences.

M. A. KASTLER, qui m'a suggéré d'entreprendre des recherches d'Astrophysique et qui a suivi mes travaux avec une amicale sollicitude.

M. V. KOURGANOFF, avec qui j'ai eu de nombreux et très utiles entretiens sur certains aspects du problème de l'équilibre radiatif.

MM. M. RUDKJØBING, de Copenhague, K. de JAGER, d'Utrecht, R. MICHARD, de Paris, avec qui d'amicales et nombreuses conversations m'ont permis d'éclaircir bien des points concernant l'amortissement dans les raies, le problème des étoiles B, la photosphère solaire et la question du coefficient moyen d'absorption.

Mme H. BERTHOD, Chef de Travaux à l'I. A. P. et Mlle D. SAPIN, Calculatrice, qui ont préparé et exécuté les calculs ingrats des coefficients d'absorption.

Mme A. LAGORCE, qui a assumé la lourde tâche que constituait la présentation matérielle de ce travail.

Enfin E. SCHATZMAN, qui a attiré mon attention sur l'importance de la théorie des étoiles B en Astrophysique et avec qui j'ai eu tant d'amicales et fécondes discussions.

LA CONSTRUCTION DES MODÈLES D'ATMOSPHÈRES

A) Hypothèses de base. Énoncés.

1. — La recherche des modèles d'atmosphères est un problème mathématique difficile. En effet, on est conduit à écrire des équations aux dérivées partielles, faisant intervenir un grand nombre de variables *non séparées* (à savoir des variables spectrales — longueur d'onde — ; géométriques — profondeur, direction angulaire — ; cinétiques — vitesses, turbulences — ; énergétiques — débit d'énergie) et complétées par des *conditions aux limites* ou des conditions de liaison particulièrement complexes (conservation du flux d'énergie).

Il est commode de procéder, pour la résolution de ces équations, en faisant le plus possible d'hypothèses simplificatrices, quitte à les éliminer une à une par une méthode d'approximations successives.

Ces hypothèses sont les suivantes :

2. — Tout d'abord, on appelle *atmosphère* l'ensemble de celles des couches superficielles de l'étoile qui influencent directement le rayonnement observable.

Avec cette définition, il sera possible de justifier a priori les hypothèses suivantes :

a) *La gravité ne varie pas dans l'atmosphère de l'étoile* (autrement dit : la fraction de la masse de l'étoile que constitue l'atmosphère est négligeable).

b) *Les sources d'énergie se trouvent localisées au centre des étoiles* : il ne s'en trouve pas dans l'atmosphère stellaire. (Il faut toutefois remarquer qu'en réalité, la dissipation des ondes sonores qui a lieu dans les couches peu denses de l'atmosphère peut constituer une source d'énergie non négligeable [36].)

Les solutions de première approximation obtenues antérieurement ont permis de montrer aussi que :

c) *La matière stellaire est un mélange de gaz parfaits.*

Nous adopterons ces hypothèses dans l'ensemble de notre étude, comme absolument indispensables pour les étoiles normales.

3. — De plus, on fait habituellement les hypothèses suivantes, légitimes en première approximation, mais que nous conserverons néanmoins au cours de notre étude, comme très suffisantes dans l'état actuel du problème.

a) On supposera que l'atmosphère est en *équilibre radiatif* (il ne s'y forme pas de mouvements convectifs) et en *équilibre hydrostatique*. Cette hypothèse est en général vérifiée dans les couches superficielles. Il est toutefois certain qu'elle n'est pas légitime car de forts mouvements de convection peuvent se former dans les couches les plus profondes de l'atmosphère, lesquelles affectent certainement le rayonnement observable (granules, peut-être spicules, rugosité observés dans le soleil). Nous la conserverons cependant dans cette étude qui sera limitée aux problèmes fondamentaux de *l'équilibre radiatif*.

b) On fait en général également l'hypothèse de *l'équilibre thermodynamique local* : les états excités des atomes obéissent à une statistique boltzmannienne : il y a *microréversibilité* des échanges énergétiques, la loi de KIRCHHOFF est valable. Il est vraisemblable qu'en réalité cet équilibre est loin d'être réalisé dans les couches très superficielles d'une étoile (chromosphère, couronne) mais ces écarts affectent peu le rayonnement observable sauf peut-être dans la formation du centre de certaines raies.

c) De plus, on admettra que l'étoile a une symétrie *sphérique*. (Cette hypothèse n'est sans doute bonne qu'en moyenne : on sait quelle influence a en effet sur les observations le relief pourtant faible de la surface solaire [9, 32, 29, 30] ; de plus, certaines étoiles appartenant à des systèmes multiples sont déformées par des marées ; d'autres sont déformées par une rotation très rapide [11]). On supposera même que l'atmosphère, très mince, est formée de couches *plan-parallèles*.

4. — Enfin, on a souvent admis la possibilité de remplacer le problème réel, — où le coefficient d'absorption est une fonction de la fréquence —, par le problème de l'atmosphère « *grise* », où ce coefficient est indépendant de la fréquence, ce coefficient « moyen » étant déduit du coefficient vrai d'absorption par une méthode « convenable ».

Cette approximation est insuffisante et plusieurs essais ont déjà été faits pour s'en débarrasser. Après avoir montré dans quels cas il est légitime de l'utiliser

(chapitre II), nous étudierons ces méthodes nouvelles à l'aide d'exemples numériques (chapitre III).

Ces différentes hypothèses se traduisent par un ensemble d'équations qu'il nous faudra résoudre. Rappelons brièvement quelles sont ces équations.

B) Hypothèses de base. Équations d'équilibre.

5. — a) Équation d'équilibre hydrostatique.

Écrivons l'équilibre d'un petit élément de matière, sous l'action des forces de pesanteur et de pression. On obtient aisément, en faisant intervenir la pression gazeuse (atomique, moléculaire, électronique) et la pression de radiation :

$$(1) \quad \frac{d}{dx} (p_g + p_r) = -g\rho.$$

(Nous écrirons dans la suite, par abréviation $p_g = p$.)

x désigne la hauteur géométrique dans la photosphère,

g désigne la gravité,

ρ désigne la masse spécifique du gaz.

b) Équation des gaz parfaits.

(2) $p = NkT$ N étant le nombre de particules (atomes, molécules, électrons) par unité de volume.

T étant la température.

k étant la constante de BOLTZMANN.

6. — c) Transfert du rayonnement.

α) Pour une radiation de fréquence $\nu = \frac{c}{\lambda}$,

dans une direction faisant l'angle θ avec la normale, l'intensité du rayonnement vérifie la relation :

$$(3) \quad dI_\nu = -I_\nu \times (\kappa_\nu \rho) \times \frac{dx}{\cos \theta} + \varepsilon_\nu \rho \frac{dx}{\cos \theta}$$

où κ_ν désigne le coefficient d'absorption par unité de masse et ε_ν désigne le coefficient d'émissivité par unité de masse

Dans la suite, nous adopterons la notation

$$\cos \theta = \mu$$

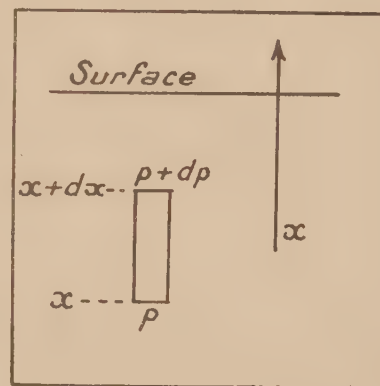


FIG. 1. — Équilibre hydrostatique.

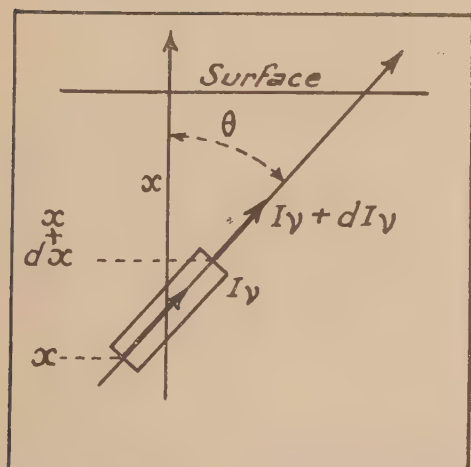


FIG. 2. — Transfert du rayonnement.

le symbole $\bar{\mu}$ étant réservé à la masse moléculaire moyenne de la matière stellaire.

β) Pour exprimer la condition du transfert *radiatif*, nous devons joindre à cette équation la condition supplémentaire de conservation du flux radiatif.

$$(4) \quad \mathcal{F}(x) = 2 \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \mu I_\nu(\mu, x) d\nu d\mu = \text{constante} = F = \frac{\sigma}{\pi} T_e^4.$$

Cette condition exprime à la fois qu'il n'y a pas de source d'énergie dans l'atmosphère et que l'énergie est transportée uniquement par rayonnement.

γ) De plus, pour exprimer l'équilibre *thermodynamique local*, nous écrirons — dans le cas où aucun processus de diffusion n'intervient — que « l'Ergiebigkeit » est égale à la fonction de Planck.

$$(5) \quad \frac{\varepsilon_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Rappelons que

$$(6) \quad \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4.$$

Dans le cas où des phénomènes de *diffusion* jouent un rôle (qu'il s'agisse d'ailleurs de diffusion avec ou sans changement de fréquence — « non cohérente » ou « cohérente »), nous devons écrire :

$$(7) \quad dI_\nu = -(\sigma_\nu + \kappa_\nu)\rho I_\nu \frac{dx}{\mu} + \varepsilon_\nu \rho \frac{dx}{\mu} + \sigma_\nu \rho \mathcal{J}_\nu[I_\nu'(\mu'), \mu] \frac{dx}{\mu}$$

où $\mathcal{J}_\nu(I_\nu', \mu)$ est une fonctionnelle des I_ν' , (ν' étant une fréquence quelconque), — fonctionnelle définie par le mode de diffusion qui a lieu dans chaque cas considéré — et une fonction de ν , de μ , de x .

Il existe des absorptions ou diffusions *continues* (les coefficients κ_ν et σ_ν varient alors peu avec la fréquence) et des absorptions par *raies*.

δ) L'équation de transfert s'écrira donc, sous la forme classique

$$(8) \quad \mu \frac{dI_\nu}{\rho dx} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) [I_\nu - S_\nu(\mu, x)]$$

qu'on obtient en combinant les équations (3) (5) (7).

Il faut joindre à cette équation la condition *de liaison* que constitue la condition de conservation du flux, et les conditions *aux limites* relatives au comportement de la fonction $I_\nu(x, \mu)$ à la surface de l'étoile et aux grandes profondeurs : ainsi on admet généralement qu'aux grandes profondeurs, l'intensité reste bornée et qu'à la surface, l'intensité des rayons pénétrant dans l'étoile est nulle. Naturellement, il y aurait lieu de modifier ces conditions dans le cas d'une atmosphère planétaire, qui ne s'étend pas à l'infini, ou encore dans le cas d'une étoile double, où le rayonnement de l'étoile A pénètre effectivement dans l'étoile B, etc....

$S_\nu(\mu, x)$ est la « fonction-source » du transfert. C'est à la détermination de cette fonction que se ramène le problème.

On pourra naturellement écrire autant d'équations qu'il existe de composantes de la lumière transférée (par exemple : composantes polarisées).

ε) Comme l'a fait justement remarquer V. KOURGANOFF [14] ⁽¹⁾ la difficulté essentielle réside dans la résolution du problème simplifié de MILNE ($S_v = B_v$; $\sigma_v = 0$).

Les différentes « variantes » résultant de la complication de la fonction-source n'apportent pas de difficulté essentielle, seulement une plus grande complexité.

Nous n'utiliserons cependant que des méthodes susceptibles d'être généralisables à ces « variantes » dont l'étude est indispensable dans les applications à des cas physiques réels.

ζ) Citons quelques cas utiles de fonctions-sources. Nous nous limiterons dans ces exemples aux étoiles normales, en éliminant les cas des atmosphères planétaires, de la réflexion d'un rayonnement provenant de l'extérieur, etc....

$$(9) \left\{ \begin{array}{ll} S_v \equiv B_v & \text{Absorption pure} \\ S_v \equiv \bar{I}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_v d\mu & \text{diffusion isotrope pure} \\ S_v = \frac{\kappa_v}{\kappa_v + \sigma_v} B_v + \frac{\sigma_v}{\kappa_v + \sigma_v} \bar{I}_v & \text{diffusion isotrope + absorption} \\ S_v = \frac{3}{8} (3 - \mu^2) \bar{I}_v + \frac{3}{8} (3\mu^2 - 1) K_v & \text{diffusion Rayleigh } \left(K_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_v \mu^2 d\mu \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} S_{vl} = \frac{3}{4} [2(\bar{I}_l - K_l) + \mu^2 (3K_l - 2\bar{I}_l + \bar{I}_r)] \\ S_{vr} = \frac{3}{4} [\bar{I}_r + K_l] \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{polarisation par diffusion} \\ \text{par les électrons libres.} \end{array} \end{array} \right.$$

De plus, on peut écrire aussi, par exemple :

$$S_v = B_v - (1 - \mu^2) \frac{\partial I_v}{\kappa_v \rho x \partial \mu} \quad \text{courbure de l'atmosphère (atmosphères étendues)}$$

où S_v ne désigne plus ce qu'on appelle la fonction-source, mais une fonction (développable a priori en fonction de μ) qui joue le même rôle dans l'équation de transfert radiatif.

7. — d) Profondeurs optiques.

Pour compléter ces équations d'équilibre, nous indiquerons les relations :

$$(10) \quad \begin{cases} \kappa_v = \kappa_v(p, T, \text{ composition chimique}) \\ \sigma_v = \sigma_v(p, T, \text{ composition chimique}). \end{cases}$$

Une étude détaillée de certains cas particuliers de ces relations sera faite au chapitre III de cette étude.

⁽¹⁾ Je remercie V. KOURGANOFF de m'avoir communiqué avant publication le texte de son traité sur les *Basic methods in Problems of Radiative transfer*.

Les grandeurs ci-dessous sont utiles dans les calculs

$$(11) \quad \begin{cases} d\tau_v = -\kappa_v \rho dx \\ ds_v = -\sigma_v \rho dx \end{cases}$$

où τ_v et s_v sont les *profondeurs optiques* d'absorption pure et de diffusion pure.

Pour

$$\begin{aligned} x = -\infty & \quad \tau_v = s_v = 0 \\ x = 0 & \quad \tau_v = \tau_0 \quad s_v = s_0. \end{aligned}$$

Naturellement τ_0 et s_0 définissent la « surface » de l'étoile : leur évaluation est assez arbitraire. Il s'agit de nombres petits, négligeables dans les cas usuels (profondeur optique de la chromosphère et de la couronne, dans le cas solaire).

L'équation de transfert pourra donc s'écrire :

$$(12) \quad \mu \frac{dI_v}{d\tau_v} = I_v - S_v(\mu, \tau_v)$$

C) Hypothèses de base. La conservation du flux.

8. — Comme il est bien connu, la difficulté essentielle provient de l'équation de transfert dont la résolution est loin d'être simple.

On la facilite souvent en lui donnant d'autres formes connues sous le nom de « formes intégrales de l'équation de transfert » (MILNE) [21].

Ces formes font intervenir les grandeurs :

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{I}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_v d\mu & \text{intensité moyenne (désignée par } J_v \text{ par de nombreux auteurs, et par la commission des notations de l'UAI)} \\ F_v = 2 \int_{-1}^{+1} I_v \mu d\mu & \text{flux (ce que les physiciens désignent par ce mot est la quantité } \pi F_v) \\ K_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_v \mu^2 d\mu & \text{proportionnelle à la pression de radiation.} \end{cases}$$

Dans le cas restreint de MILNE ($S_v = B_v$), il est bien connu que l'équation du transfert peut s'écrire :

$$(14) \quad \begin{cases} \text{Si } \mu > 0 & I_v(\tau_v) = \int_{\tau_v}^{\infty} B_v(T) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{T-\tau_v}{\mu}} dt \\ \text{Si } \mu < 0 & I_v(\tau_v) = - \int_0^{\tau_v} B_v(T) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t-\tau_v}{\mu}} dt \end{cases}$$

équations où sont incluses les conditions aux limites mentionnées ci-dessus (§ 6, 8) ; et les équations suivantes peuvent s'en déduire (forme intégrale de l'équation de transfert) :

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{I}_v = \Lambda\{B_v(\tau_v)\} = \frac{1}{2} \int_{\tau_v}^{\infty} B_v(t) K_1(t - \tau_v) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_v} B_v(t) K_1(\tau_v - t) dt \\ F_v = \Phi\{B_v(\tau_v)\} = 2 \int_{\tau_v}^{\infty} B_v(t) K_2(t - \tau_v) dt - 2 \int_0^{\tau_v} B_v(t) K_2(\tau_v - t) dt \\ K_v = \frac{1}{4} \chi\{B_v(\tau_v)\} = \frac{1}{2} \int_{\tau_v}^{\infty} B_v(t) K_3(t - \tau_v) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_v} B_v(t) K_3(\tau_v - t) dt \end{cases}$$

Les fonctions $K_n(x)$ sont les fonctions intégréo-exponentielles d'ordre n . Les opérateurs Λ , Φ , χ ont été utilisés par de nombreux auteurs [10, 13, 16].

9. — Dans le cas très général (qui englobe les cas particuliers examinés par CHANDRASEKHAR [3, 4]) où la fonction-source est un *polynôme* en μ , on a :

$$(16) \quad S_v = S_{0v}(\tau_v) + \mu S_{1v}(\tau_v) + \dots + \mu^p S_{pv}(\tau_v) + \dots + \mu^N S_{Nv}(\tau_v)$$

des formules analogues aux formules (15) peuvent être démontrées très simplement, en utilisant les propriétés des fonctions intégréo-exponentielles (nous renverrons pour toutes précisions concernant ces fonctions aux articles de V. KOURGANOFF [12] et de différents auteurs [43, 31, 10, 40]).

Les expressions

$$(17) \quad \begin{cases} I_v(\tau_v) = \int_{\tau_v}^{\infty} S_v(t) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t-\tau_v}{\mu}} dt & \text{si } \mu > 0 \\ I_v(\tau_v) = - \int_0^{\tau_v} S_v(t) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t-\tau_v}{\mu}} dt & \text{si } \mu < 0 \end{cases}$$

sont encore valables et équivalentes à l'équation de transfert et à ses conditions aux limites.

On peut en déduire les équations intégrales :

$$(18) \quad \begin{cases} 2\bar{I}_v(\tau_v) = \sum_{p=0}^N \left[\int_{\tau_v}^{\infty} S_{pv}(t) K_{p+1}(t - \tau_v) dt + (-1)^p \int_0^{\tau_v} S_{pv}(t) K_{p+1}(\tau_v - t) dt \right] \\ \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}_v(\tau_v) = \sum_{p=0}^N \left[\int_{\tau_v}^{\infty} S_{pv}(t) K_{p+2}(t - \tau_v) dt + (-1)^{p+1} \int_0^{\tau_v} S_{pv}(t) K_{p+2}(\tau_v - t) dt \right] \\ 2K_v(\tau_v) = \sum_{p=0}^N \left[\int_{\tau_v}^{\infty} S_{pv}(t) K_{p+3}(t - \tau_v) dt + (-1)^{p+2} \int_0^{\tau_v} S_{pv}(t) K_{p+3}(\tau_v - t) dt \right] \end{cases}$$

Nous montrons au paragraphe F comment il est possible de calculer pratiquement ces quantités.

10. — La conservation du flux peut alors s'exprimer par l'une des deux relations :

$$(19) \quad \begin{cases} \mathcal{F}(x) = \int_0^{\infty} \mathcal{F}_v(\tau_v) dv = \text{constante} = F \\ \frac{d\mathcal{F}(x)}{dx} = 0 \end{cases}$$

que nous pouvons écrire en utilisant la forme intégrale des équations de transfert.

La relation $\frac{d\mathcal{F}}{dx} = 0$ en particulier prend des formes intéressantes (déjà bien connues dans le cas restreint de MILNE).

On a, en multipliant les membres de l'équation de transfert par $d\mu$:

$$\mu \frac{dI_v}{dx} d\mu = I_v d\mu - S_{0v} d\mu - \mu S_{1v} d\mu - \dots - \mu^p S_{pv} d\mu - \mu^N S_{Nv} d\mu.$$

Intégrons sur μ :

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\mathcal{P}}_v}{dx} = -2\rho(\kappa_v + \sigma_v) \left[\bar{I}_v - (S_{0v} + \frac{1}{3} S_{2v} + \dots \frac{1}{2p+1} S_{2pv} \dots) \right]$$

or

$$\int_0^\infty \frac{d\bar{\mathcal{P}}_v}{dx} dv = 0$$

donc :

$$(20) \quad \int_0^\infty (\kappa_v + \sigma_v) \left[\bar{I}_v - \left(S_{0v} + \frac{1}{3} S_{2v} + \dots \frac{1}{2p+1} S_{2pv} \dots \right) \right] dv = 0.$$

Dans le cas où S_v ne dépend pas de μ (absorption plus diffusion *isotrope*), on retrouve la formule bien connue :

$$(21) \quad \int_0^\infty \kappa_v (\bar{I}_v - B_v) dv = 0 \quad \left(S_v = \frac{\kappa_v}{\kappa_v + \sigma_v} B_v + \frac{\sigma_v}{\kappa_v + \sigma_v} \bar{I}_v \right)$$

D) Résolution du problème gris.

11. — Ce problème a été souvent exposé et étudié. Nous renvoyons pour tous détails aux traités récents de CHANDRASEKHAR [7] et de KOURGANOFF [14]. Outre les méthodes de résolution dont l'intérêt est purement historique, trois méthodes seulement ont jusqu'ici permis une résolution exacte et rapide, ainsi qu'une généralisation facile aux différentes variantes. Nous laisserons de côté la plus récente de ces méthodes, celle de MENZEL et SEN [20] et nous allons maintenant résumer les deux autres, en insistant sur leurs faiblesses et en essayant de les compléter.

12. — a) Méthode de Wick-Chandrasekhar.

L'immense déploiement de la solution de CHANDRASEKHAR [3, 4] a prouvé suffisamment combien cette méthode est maniable, quelle que soit la forme de la fonction-source.

On sait qu'elle consiste dans le remplacement des intégrales portant sur μ par une formule d'intégration approchée utilisant les valeurs de la fonction intégrée pour un nombre n fini de valeurs de μ , ce nombre n définissant le degré d'approximation obtenu. L'équation de transfert est alors remplacée par n équations différentielles ne portant plus que sur une seule variable, la variable μ étant fixée. L'intégration se fait de façon simple et la condition de constance du flux ($B = \bar{I}$ dans le cas gris) se traduit très simplement. Nous renverrons pour des détails complémentaires aux travaux originaux de CHANDRASEKHAR [3] et aux études d'ensemble qu'il en a donné lui-même [4] et qui ont été données par d'autres auteurs [14].

A la suite d'un travail d'AMBARZUMIAN [1], CHANDRASEKHAR [5] utilisant une remarque physique de ce dernier, a montré qu'il était possible de résoudre d'emblée le problème à l'approximation $n = \infty$. Pourtant cette étude comporte deux points faibles.

En effet :

α) Si le travail de CHANDRASEKHAR permet de calculer *exactement l'intensité*

sortante : $I(0, \mu)$, il ne permet nullement de calculer la *fonction-source* autrement qu'à un degré *limité* d'approximation.

Le problème se pose donc de passer de $I(0, \mu)$ à la fonction-source. Ce problème intervenant également dans le cas (soleil) où $I(0, \mu)$ est donné par l'expérience, et ayant reçu ces dernières années d'intéressantes solutions, il nous a paru utile d'y consacrer un paragraphe de notre chapitre V sur la structure de l'atmosphère solaire.

β) Le travail de CHANDRASEKHAR permet le calcul *exact* de $I(0, \mu)$ dans un très grand nombre de cas. Toutefois, il est possible de montrer — nous y reviendrons au chapitre II — que dans un très grand nombre de cas plus complexes, la résolution telle que l'indique CHANDRASEKHAR n'est pas simplement réalisable. Dans tous les cas étudiés par lui ce qu'il nomme « *l'équation caractéristique* du problème » est du *premier degré* ; nous étudierons en détail un exemple d'une grande importance pratique où elle est du *second degré* et où la résolution « à l'approximation infinie » est impossible.

13. — b) *Méthode variationnelle de Kourganoff.*

Cette méthode a permis à son auteur d'obtenir avec rapidité des résultats hautement précis [13]. Elle est de plus généralisable au cas non gris.

Elle consiste dans le remplacement de la fonction-source par une somme de fonctions simples affectées de coefficients arbitraires. Ces coefficients sont déterminés par une condition de minimum imposée à une certaine fonctionnelle positive dont la nullité exprimerait la constance du flux. La fonctionnelle choisie par KOURGANOFF est la suivante :

$$(22) \quad \sigma = \int_0^\infty [\mathcal{F}(x) - F]^2 dx.$$

Dans le cas gris, la méthode a permis de tabuler avec 6 décimales exactes la fonction $q(\tau)$ de HOPF [10] : en effet dans ce cas, la fonction-source se laisse bien représenter par une combinaison d'une fonction linéaire et des fonctions intégrales exponentielles. Nous verrons dans la suite que dans le cas réel (chapitre V), une telle représentation est moins aisée.

De plus, le choix de la fonctionnelle, s'il permet des calculs faciles, nous paraît peu adapté au problème que l'on se propose de résoudre. En effet, on assure la constance du flux entre la surface et l'infini en accordant à une certaine couche d'épaisseur donnée, le même poids à la surface qu'à l'infini : or les régions superficielles influencent le rayonnement observable beaucoup plus que les régions profondes ; on pourrait compenser cette exagération de l'influence des grandes profondeurs par l'utilisation d'une fonctionnelle telle que :

$$\int_0^\infty [\mathcal{F}(x) - F]^2 \varphi(x) dx$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive de x et rapidement décroissante (par exemple e^{-ax} ou $K_n(x)$...). Mais cela entraînerait des difficultés de calcul.

Nous reviendrons plus loin sur les possibilités d'application de la méthode de KOURGANOFF aux cas physiquement réels.

E) *Le problème non gris.*

14. — a) *Méthodes approchées.*

α) La première solution approchée consiste évidemment en la recherche d'un cas gris « équivalent ». La définition de cette équivalence et le calcul du coefficient d'absorption moyen ont fait l'objet de nombreuses publications [9, 33, 5, 42, 22]. Cette solution n'est pas en général bonne : le flux calculé en utilisant la répartition des températures obtenues est en effet loin d'être constant.

β) On peut également supposer que le coefficient d'absorption n'est indépendant de la longueur d'onde que dans certains domaines finis de longueur d'onde (paliers) : cette hypothèse de calcul permet de respecter les discontinuités du coefficient d'absorption continu.

C'est dans cet esprit que RUDKJØBING [34] a résolu le problème des étoiles B, en supposant que :

$$\kappa_v = 0 \quad \text{pour } \lambda > \lambda_{\text{Lyman}} = 912 \text{ \AA}$$

$$\kappa_v = \bar{\kappa} \quad \text{pour } \lambda < \lambda_{\text{Lyman}} = 912 \text{ \AA}$$

$\bar{\kappa}$ étant calculé par une formule de ROSSELAND généralisée. La solution de RUDKJØBING, sans être parfaite, est bien meilleure que la solution grise ordinaire.

γ) On peut éliminer toute hypothèse sur le coefficient d'absorption, mais introduire dans le calcul des formules d'approximation — telles les approximations classiques d'EDDINGTON [8], ou celles de PANNEKOEK [26] — formules dont on a pu évaluer le degré de précision qui n'est pas très élevé [15].

C'est dans cet esprit que MUSTEL [25] a résolu — avec d'ailleurs une grande élégance — le problème des étoiles B.

15. — b) *Méthode de Chandrasekhar.*

La première méthode rationnelle a été introduite par CHANDRASEKHAR [5].

C'est une méthode d'approximations successives qui semble converger assez rapidement [22] et qui est basée sur le fait que $\frac{\kappa_v}{\kappa}$ varie peu avec la longueur d'onde, ce qui est assez inexact surtout au voisinage de la longueur d'onde correspondant à une discontinuité du coefficient d'absorption.

Elle présente aussi le défaut de nécessiter le calcul préliminaire de la « straight mean » — de la moyenne de CHANDRASEKHAR — qui est longue à évaluer.

De plus, son application au cas du soleil par MÜNCH [24] a mis en évidence un défaut grave de cette méthode : En effet, MICHARD [22] a calculé que la température effective du modèle obtenu est différente de celle qui a servi au calcul de la solution grise de première approximation.

Nous abandonnerons donc cette méthode, comme d'un emploi difficile et hasardeux.

c) *Méthode variationnelle de Kourganoff.*

16. — α) KOURGANOFF a proposé en 1947 [13] une méthode de résolution du problème non-gris qui constitue une élégante généralisation de sa méthode d'étude du cas gris.

Comme dans toute méthode itérative, il est nécessaire de partir d'une première approximation (qui peut être un modèle gris).

Le passage de la $n^{\text{ième}}$ à la $(n + 1)^{\text{ème}}$ approximation se fait de la façon suivante :

On dispose des lois $T_n(p)$, $\tau_{vn}(p)$, $\kappa_{vn}(p)$, $\sigma_{vn}(p)$... correspondant à la $n^{\text{ième}}$ approximation (la variable pression, choisie ici comme fondamentale, peut naturellement être remplacée par p_0 , x , etc...).

On calcule en utilisant la méthode décrite plus loin (§ F), le flux à partir de fonctions-sources monochromatiques représentées par des combinaisons de fonctions simples affectées de coefficients indéterminés. Ceux-ci sont ensuite calculés, comme dans le cas gris, par une condition de minimum imposée à une certaine fonctionnelle positive de la fonction-source fonctionnelle qui serait nulle si le flux était rigoureusement constant.

La fonctionnelle choisie par KOURGANOFF est l'expression :

$$(23) \quad W = \int_0^\infty [\bar{\mathcal{T}}(x) - F]^2 dx + \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^\infty [\mathcal{B}_{vi}(\tau_{vi}) - B_{vi}(\tau)]^2 dx$$

$\bar{\mathcal{T}}(x)$ et $\mathcal{B}_{vi}(\tau_{vi})$ désignent le flux et l'Ergiebigkeit calculée à partir de la fonction-source choisie. On aura ainsi satisfait aux conditions de constance du flux et d'équilibre thermodynamique local.

Les coefficients de la fonction-source $S_v(\tau_v)$ étant ainsi déterminés, on connaît $S_v(\tau_v)$, puis $\bar{I}_v$, $\bar{\mathcal{T}}_v$, K_v et par suite B_v et il est possible de passer au stade suivant de l'itération :

$$(24) \quad \int_0^\infty B_v dv = \frac{ac}{4\pi} T_{n+1}^4.$$

Nous avons donc $T_{n+1}(p)$ puis $\kappa_{vin+1}(p)$..., et à l'aide de l'équation d'équilibre hydrostatique $\tau_{vin+1}(p)$... etc..

β) L'avantage de la méthode est sa souplesse, son naturel.... D'autre part, le choix de l'approximation initiale est sans importance : si la méthode converge, c'est vers la bonne solution.

Mais le gros inconvénient est l'obligation de résoudre à chaque étape de l'itération, un système de n équations linéaires à n inconnues, n étant de l'ordre de 50. Cette opération serait possible à l'aide de machines électroniques, ou à fiches perforées qui ne sont pas encore à la disposition des bureaux de calcul astronomique. Des méthodes plus facilement réalisables de relaxation permettraient aussi cette résolution, mais prendraient néanmoins un temps assez long

malgré une certaine tendance des systèmes à l'indétermination, ce qui favorise la relaxation. C'est en raison des difficultés de calcul intervenant dans cette méthode que nous adopterons celle, plus maniable, de B. STRÖMGREN.

17. — γ) Un autre point de la méthode de KOURGANOFF mérite d'être discuté [28].

Le problème réel est bien différent de celui qui est résolu par la condition de minimum imposée à l'expression W ; cette condition nous permettra en effet d'assurer la constance du flux entre la surface et l'infini; mais là n'est pas le véritable problème: il s'agit d'assurer la constance du flux entre la surface et la zone convective qui n'est pas, en général, très profonde. L'on sait [35] que ce problème n'est pas résolu par la simple considération d'un modèle valable jusqu'à l'infini, mais que l'on arrêterait à une certaine profondeur et cela, en raison du caractère *fonctionnel* du flux, qui dépend quand même, en tout point, de ce qui se passe dans toute l'étendue de l'atmosphère, y compris dans la zone convective.

C'est pourquoi il nous paraît préférable d'appliquer la méthode de KOURGANOFF en introduisant plutôt la fonctionnelle suivante:

$$(25) \quad W_i = \int_{\text{Surface}}^{x_i} [\mathcal{F}(x) - F]^2 dx$$

où x_i représente la limite de la couche convective, au-dessous de laquelle le flux radiatif n'a aucune raison d'être constant, le modèle dans la zone convective étant déterminé par une autre méthode.

δ) Comme exemple, nous pouvons montrer — dans le cas simple de la recherche d'une formule linéaire dans le cas gris — ce que donnent ces différentes façons de poser les calculs. Dans ce cas, $\mathcal{F}(x)$ s'exprime facilement en fonction des fonctions $K_3(\tau)$ et $K_4(\tau)$

$$(26) \quad \text{Si} \quad T^4 = \frac{1}{2} T_e^4(a + b\tau) = \frac{3}{4} T_e^4[\tau + q(\tau)]$$

$$(27) \quad \text{On a} \quad \mathcal{F}(x) = aFK_3(\tau) + bF\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} K_4(\tau)\right).$$

Les calculs nécessitent les résultats suivants, faciles à démontrer:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^x K_3(x) dx = \frac{1}{3} - K_4(x) \cong \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \dots \\ \int_0^x K_4(x) dx = \frac{1}{4} - K_5(x) \cong \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \dots \\ \int_0^x K_4(x) K_3(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} - K_4^2(x) \right] \cong \frac{x}{6} - \frac{7}{24} x^2 + \dots \\ \int_0^x K_3^2 dx = \frac{2}{5} \log_e 2 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} e^{-x} [K_3 - K_2 + K_1] + \frac{2}{5} \int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \frac{1}{5} x K_3^2 \cong \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} + \dots \\ \int_0^x K_4^2 dx = -\frac{2}{7} \log_e 2 + \frac{5}{51} - \frac{2}{7} e^{-x} [K_4 - K_3 + K_2 - K_1] \\ \quad - \frac{2}{7} \int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \frac{1}{7} x K_4^2 \cong \frac{x}{9} - \frac{x^2}{6} + \dots \end{array} \right.$$

On obtient alors, pour différentes valeurs de τ_i , les résultats du tableau 1 (réunis à ceux obtenus par d'autres méthodes).

TABLEAU

ANCIENNES SOLUTIONS	a	b	NOUVELLES SOLUTIONS	a	b
			$\tau_i = \infty$ KOURGANOFF [13] 1947	1.079	1.5
K. SCHWARZSCHILD, 1906 (1 ^{re} appr.) [37]	1	2	$\tau_i = 10$	1.072	1.503
			5	1.065	1.506
JEANS, 1917	0.75	1.5	3	1.052	1.513
			2	1.037	1.521
MILNE (1 ^{re} appr.) 1921 [21]	1	1.5	1	1.003	1.544
			0.5	0.979	1.598
			0	0.857	1.714

Sur la figure 3, on peut se rendre compte de ce que représentent ces solutions approchées comparées à la solution exacte du cas gris, avec zone radiative infinie,

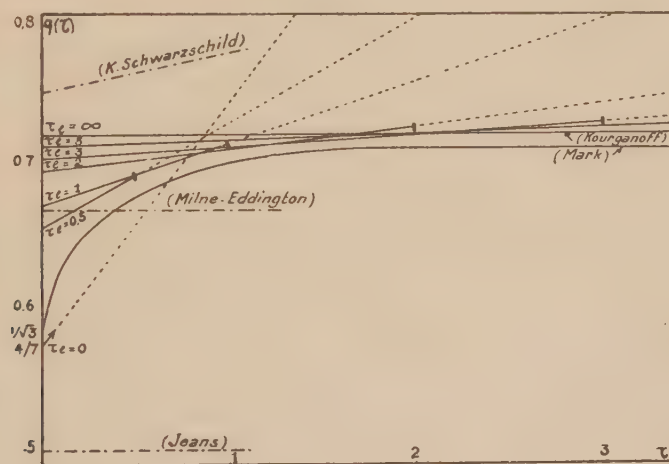


FIG. 3. — Approximations linéaires (dans le cas gris).

calculée par MARK [19] et confirmée par KOURGANOFF [13] et MENZEL et SEN [20].

Sur la figure 4, nous avons représenté la variation du flux correspondant à ces différentes solutions.

Il est remarquable de noter avec KOURGANOFF [14], que les droites obtenues dans les solutions à W_i minimum, enveloppent une courbe *différente* de la courbe de MARK, quoique assez peu différente de cette dernière ; en effet, la transformation $F = \Phi \{S\}$ n'est nullement une transformation de contact.

Ces solutions supposent que la même solution linéaire est valable dans la

Écrivons alors la condition de conservation de flux :

$$(29) \quad \bar{\kappa}_{Pl} \int_0^\infty B_{\nu n+1} d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu B_{\nu n+1} d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu \bar{I}_{\nu n} d\nu$$

soit

$$(30) \quad \frac{ac}{4\pi} T_{n+1}^4 = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} \int_0^\infty \bar{I}_{\nu n} d\nu$$

ce qui définit la nouvelle loi de température.

Nous pouvons naturellement écrire la conservation du flux sous la forme qui sera nécessitée par le choix de la fonction-source (voir ci-dessus § 9).

La moyenne $\bar{\kappa}_{Pl}$ peut être calculée à priori en fonction de la température et de la pression. Nous utiliserons naturellement la température et la pression correspondant à l'itération d'ordre n pour le calcul de $\bar{\kappa}_{Pl}$ (moyenne d'EDDINGTON, nommée aussi moyenne-PLANCK).

Nous pourrions appliquer l'itération sous la forme suivante :

$$(31) \quad \frac{T_{n+1}^4}{T_n^4} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu \bar{I}_{\nu n} d\nu}{\int_0^\infty \kappa_\nu B_{\nu n} d\nu} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4} \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu (\bar{I}_\nu - B_\nu) d\nu}{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu}.$$

En utilisant ensuite l'équation d'équilibre hydrostatique, nous pourrions calculer les quantités nécessaires à l'itération suivante : $\tau_\nu(p)$

19. — β) On voit qu'en aucun endroit du développement de cette méthode n'intervient la valeur exacte du flux. D'autre part, aux grandes profondeurs, l'isotropie est réalisée et l'on a automatiquement $\int_0^\infty \kappa_\nu (\bar{I}_\nu - B_\nu) d\nu = 0$.

Donc les itérations successives modifieront le modèle seulement dans les couches superficielles et nullement dans les couches profondes : donc le modèle gris initial doit avoir à l'infini le même flux que le modèle final : cette condition semble donc limiter, pour le calcul de l'approximation grise initiale, le choix du coefficient moyen d'absorption à la moyenne de ROSSELAND [22]. En réalité, les couches profondes n'ont, physiquement parlant, qu'une importance secondaire : si on obtient un modèle dont le flux est constant dans les couches superficielles, on prendra comme température effective la valeur correspondante à ce flux constant (même si ce n'est pas là, la température effective dont on est parti), quitte à compléter le modèle dans les régions profondes par un modèle gris ROSSELAND de même température effective. Nous verrons au chapitre V, sur un exemple numérique, comment on peut opérer pratiquement.

F) *Calcul pratique du flux, de l'intensité moyenne, de la pression de radiation.*

20. — Il est souvent utile, on l'a vu, au cours du développement des différentes méthodes de résolution de l'équation de transfert, de savoir calculer les grandeurs $\mathcal{F}_\nu$, $\bar{I}_\nu$, K_ν à partir de la donnée de la fonction-source.

Dans la méthode variationnelle [13], la fonction-source est une combinaison linéaire de fonctions simples du type τ^n , $e^{-k\tau}$, $K_p(\tau)$. Il est donc nécessaire pour calculer $\mathcal{F}_v$, $\bar{I}_v$, K_v au moyen des formules (18), de connaître les transformées de ces fonctions simples au moyen des opérateurs Λ , Φ , χ : ce travail a été fait pour les plus importantes de ces transformées par V. KOURGANOFF (utilisées dans le calcul de $\bar{I}_v$ et $\mathcal{F}_v$) [12, 13].

Dans la méthode de B. STRÖMGREN [39] les intégrales (18) sont remplacées par des formules d'intégration approchée du type :

$$(32) \quad \int_0^\infty S(t)\varphi(t,\tau)dt = h_1(\tau)S[\tau_1(\tau)] + \dots + h_n(\tau)S[\tau_n(\tau)]$$

où $h_1, h_2, \dots, h_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ sont des fonctions connues de τ pour une forme déterminée de $\varphi(t, \tau)$. Ces fonctions sont choisies de manière à ce que la formule soit exacte pour une fonction-source qui serait un polynôme de degré $n - 1$. Elles ont été tabulées par B. STRÖMGREN dans les cas usuels (calcul de $\mathcal{F}_v$, $\bar{I}_v$).

Nous nous proposons maintenant de donner quelques formules générales de calcul des fonctionnelles utiles et d'étendre les tables de V. KOURGANOFF et B. STRÖMGREN au calcul de la pression de radiation (calcul de K_v).

21. — Formules générales de transformation.

a) Il peut être utile de connaître les transformées par les opérateurs Λ , Φ , χ et par les opérateurs plus compliqués que nous avons introduit plus haut (formules (18)), des fonctions τ^n et $e^{-k\tau}$. Les transformées relatives à Φ ont été déjà publiées par V. KOURGANOFF [13] et certaines formules permettant les calculs des transformées par les divers opérateurs ont été calculées par LE CAINE [18].

Si l'on pose, pour généraliser les notations relatives aux opérateurs :

$$(33) \quad 2\Lambda_i\{f(x)\} = \int_0^\infty f(t)K_i(t-x)dt + (-1)^{i+1} \int_0^x f(t)K_i(x-t)dt$$

avec $\Phi = 4\Lambda_2$ et $\chi = 4\Lambda_3$

on aura :

$$(34) \quad \begin{cases} 2\Lambda_i\{\tau^n\} = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{p!} \frac{1}{n-p+i} \tau^p [1 - (-1)^{n-p+i}] + (-1)^{n+i} n! K_{n+1+i}(\tau) \\ 2\Lambda_i\{e^{-k\tau}\} = (-1)^{i+1} e^{-k\tau} \left[\frac{1}{k^i} \log_e \frac{1+k}{1-k} - \sum_{p=2}^i \frac{1+(-1)^p}{k^{i-p+1}} \frac{1}{p-1} - \frac{K_1(\tau-k\tau)}{k^i} \right] + (-1)^{i-1} \left[\frac{K_i}{k} + \dots + \frac{K_1}{k^i} \right]. \end{cases}$$

b) Les formules concernant les transformations des fonctions intégrées exponentielles ont été étudiées par V. KOURGANOFF, dans le cas des opérateurs Λ , Φ , χ . Nous nous bornerons à renvoyer le lecteur aux mémoires de cet auteur [12].

22. — La pression de radiation.

La pression de radiation peut se déduire de l'intensité par les formules générales

(dont on pourra trouver une démonstration, par exemple, dans le traité de CHANDRASEKHAR [6]) :

$$(35) \quad p_r = \int_0^\infty p_{rv} dv$$

$$(36) \quad p_{rv} = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I_v \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{c} K_v.$$

Dans le cas particulier de l'isotropie, on a :

$$(37) \quad p_r = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty B_v dv = \frac{1}{3} aT^4.$$

Il est nécessaire de savoir calculer, commodément et de façon suffisamment précise, la pression de radiation, qui intervient dans l'équation d'équilibre hydrostatique.

23. — *Le calcul de la pression de radiation.*

a) Il est donc nécessaire, pour calculer la fonction pression de radiation de connaître les transformées χ des fonctions 1 , τ , $K_2(\tau)$, $K_3(\tau)$, $K_4(\tau)$ par l'intermédiaire de l'opérateur χ .

KOURGANOFF [2] a tabulé les fonctions

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \Lambda\{1\} & \varphi_0 &= \Phi\{1\} \\ \lambda_1 &= \Lambda\{\tau\} & \varphi_1 &= \Phi\{\tau\} \\ \lambda_i &= \Lambda\{K_i(\tau)\} & \varphi_i &= \Phi\{K_i(\tau)\} \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Nous nous proposons de compléter ces tables par une table des fonctions :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \chi\{1\} \\ \chi_1 &= \chi\{\tau\} \\ \chi_i &= \chi\{K_i(\tau)\} \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer à partir des définitions, les formules :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_0 &= \frac{4}{3} - 2 K_1(\tau) \\ \chi_1 &= \frac{4}{3} \tau + 2 K_3(\tau) \\ \frac{1}{2} \chi_i &= -\frac{1}{2} \varphi_{i+1} + \frac{K_3(\tau)}{i} \\ \frac{1}{2} \chi'_i &= \frac{1}{2} \varphi_i \end{aligned} \right.$$

D'où les tables ci-jointes, déduites des tables de V. KOURGANOFF (tables 1).

Les transformées des fonctions τ^n et $e^{-k\tau}$ n'étant pas utilisées dans la méthode de KOURGANOFF, en raison de leur « rigidité » plus grande que celles des fonctions intégral-exponentielles, il a paru inutile de les tabuler d'autant plus

qu'elles sont données par des expressions analytiques explicites et simples, écrites ci-dessus (formules (34)).

24. — *b)* B. STRÖMGREN a utilisé pour le calcul des coefficients de la formule d'intégration approchée donnant $\mathcal{F}(\tau)$ ou $\bar{I}(\tau)$, la séparation de ces deux fonctions en deux intégrales, ce qui assurait en doublant le nombre des coefficients, une meilleure représentation de $\mathcal{F}$ et $\bar{I}$.

Le calcul de la pression de radiation nécessitant une précision moins grande, nous avons calculé ces deux intégrales par une seule formule. Tout comme dans les tables de STRÖMGREN, notre table sera valable en toute rigueur pour toute fonction-source de la forme :

$$(39) \quad S(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3.$$

Mais elle sera moins exacte que les tables de STRÖMGREN dès que la fonction-source s'écartera de cette forme polynômiale.

Nous cherchons à tabuler $h_1 \ h_2 \ \tau_1 \ \tau_2$ tels que :

$$(40) \quad p_r = \int_0^\infty p_{rv} dv; \quad p_{rv} = h_1 S_v(\tau_1) + h_2 S_v(\tau_2).$$

Ces quatre coefficients seront déterminés par les quatre équations suivantes :

$$(41) \quad \begin{aligned} h_1 + h_2 &= \chi_0(\tau) \\ h_1\tau_1 + h_2\tau_2 &= \chi_1(\tau) \\ h_1\tau_1^2 + h_2\tau_2^2 &= \chi_2(\tau^2) \\ h_1\tau_1^3 + h_2\tau_2^3 &= \chi_3(\tau^3). \end{aligned}$$

Ce système est facile à résoudre, puisqu'on sait calculer les fonctions $\chi \dots$

Les résultats sont rassemblés dans la table 2.

25. — *Évaluation approchée du flux.*

Au cours d'une itération de la méthode de B. STRÖMGREN, on est amené à calculer l'expression

$$\int_0^\infty \kappa_v(\bar{I}_v - B_v) dv.$$

Il est possible, sans aucun long calcul, d'en déduire une évaluation du flux.

En effet, l'on a :

$$(42) \quad \frac{d\mathcal{F}}{p dx} = 4 \int_0^\infty \kappa_v(\bar{I}_v - B_v) dv$$

$$(43) \quad \text{donc} \quad \frac{d\mathcal{F}}{d(p+p_r)} = \frac{4}{g} \int_0^\infty \kappa_v(\bar{I}_v - B_v) dv.$$

D'où le calcul de $\mathcal{F}(p+p_r)$ à partir de la connaissance d'une condition aux limites, qui sera évidemment la donnée de la valeur F du flux à l'infini.

Manuscrit reçu le 14 mai 1950.

TABLEAU 1

Fonctions $\chi_i(\tau)$

τ	$10^7 \chi_0$	$10^7 \chi_1$	$10^7 \chi_2$	$10^7 \chi_3$	$10^7 \chi_4$
0.00	6 666 666	5 000 000	2 500 000	1 545 177	1 111 111
0.01	6 765 686	5 067 163	2 539 468	1 569 487	1 128 543
0.02	6 862 804	5 135 307	2 576 203	1 592 466	1 145 105
0.03	6 958 096	5 204 413	2 610 397	1 614 177	1 160 835
0.05	7 143 443	5 345 441	2 671 781	1 654 014	1 189 928
0.10	7 578 611	5 713 652	2 789 940	1 734 861	1 250 157
0.20	8 344 389	6 510 873	2 910 876	1 831 616	1 326 456
0.30	8 994 629	7 378 688	2 925 360	1 864 218	1 357 968
0.40	9 550 630	8 306 663	2 870 604	1 851 959	1 357 183
0.60	10 440 792	10 310 177	2 643 108	1 743 780	1 292 908
0.80	11 107 534	12 468 152	2 345 465	1 577 722	1 182 429
1.00	11 612 084	14 742 418	2 034 805	1 392 047	1 053 520
1.50	12 413 194	20 770 598	1 348 251	954 292	737 377
2.00	12 832 877	27 093 115	855 158	621 245	488 148
2.50	13 057 690	33 571 481	530 219	393 279	313 344
3.00	13 180 032	40 133 960	324 440	244 803	197 353
∞	13 333 333	∞	0	0	0

TABLEAU 2

τ	τ_1	τ_2	h_1	h_2
0.00	.4463	2.8477	.6103 10^{-10}	.08828 10^{-10}
.01	.4455	2.8462	.6191 10^{-10}	.08958 10^{-10}
.02	.4454	2.8450	.6284 10^{-10}	.09088 10^{-10}
.03	.4459	2.8443	.6376 10^{-10}	.09180 10^{-10}
.05	.4464	2.8434	.6544 10^{-10}	.09419 10^{-10}
.10	.4536	2.8463	.6946 10^{-10}	.09968 10^{-10}
.20	.4805	2.8635	.7646 10^{-10}	.1100 10^{-10}
.30	.5147	2.8923	.8216 10^{-10}	.1203 10^{-10}
.40	.5583	2.9188	.8690 10^{-10}	.1320 10^{-10}
1.00	.8882	3.1419	1.0115 10^{-10}	.2060 10^{-10}
1.5	1.2098	3.3978	1.0324 10^{-10}	.2769 10^{-10}
2	1.5314	3.6416	.9750 10^{-10}	.3692 10^{-10}
2.5	1.9038	4.0177	.9365 10^{-10}	.4318 10^{-10}
3	2.2952	4.4160	.8299 10^{-10}	.4884 10^{-10}
τ grand	$\tau - 1.09545$	$\tau + 1.09545$	.6987 10^{-10}	.6987 10^{-10}

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMBARZUMIAN V. A., *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, **38**, 1943, 257. — *Russ. Astr. J.*, **19**, 1942. — *J. Phys. Acad. Sci. U. R. S. S.*, **8**, 1944, 65.
- [2] BARBIER D., CANAVAGGIA R., CHALONGE D., *Ann. Astr.*, **10**, 1947, 195.
- [3] CHANDRASEKHAR S., *Ap. J.*, **99**, 1944, 180 ; **100**, 1944, 76, 117, 355 ; **101**, 1945, 95, 328, 348 ; **102**, 1945, 402 ; **103**, 1946, 165, 351 ; **104**, 1946, 110, 191 ; **105**, 1949, 151, 164, 424, 435, 441, 461 ; **106**, 1947, 143, 145, 152 ; **107**, 1947, 48, 188, 216 ; **108**, 1948, 92.
- [4] CHANDRASEKHAR S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1947, 641.
- [5] CHANDRASEKHAR S., *Ap. J.*, **101**, 1945, 348.
- [6] CHANDRASEKHAR S., *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago Univ. Press.
- [7] CHANDRASEKHAR S., *Radiative Transfer*, Oxford Press.
- [8] EDDINGTON S., *The Internal Constitution of Stars*, Cambridge, 1926.
- [9] EVANS D. S., *M. N.*, **107**, 1947, 433.
- [10] HOFF E., « Mathematical problems of radiative equilibrium » *Cambridge Math. Tracts*, **31**, Cambridge, G. B. 1934.
- [11] KOPAL Z., « An introduction to the study of Eclipsing Variables » *H. U. P.*, 1940, Chap. VI.
- [12] KOURGANOFF V., *Ann. Astr.* **10**, 1947, 282, 329, *Contr. I. A. P.*, B 19. — *C. R. Acad. Sci.*, **225**, 1947, 430, 451 ; **227**, 1948, 958, *Contr. I. A. P.*, A 32.
- [13] KOURGANOFF V., *C. R. Acad. Sci.*, **225**, 1947, 491 ; **225**, 1947, 1124, *Contr. I. A. P.*, A 10 ; **227**, 1948, 895, *Contr. I. A. P.*, A 31 ; **228**, 1949, 300, *Contr. I. A. P.*, A 36. — *Ann. Astr.*, **12**, 1949, 169, *Contr. I. A. P.*, B.
- [14] KOURGANOFF V., *Basic Methods in Problems of Radiative Transfer...*, Oxford Univ. Press. (Sous presse.)
- [15] KOURGANOFF V., *Astrophysica Norvegica*, **5**, 1949, 1.
- [16] KOURGANOFF V., MICHARD R., *C. R. Acad. Sci.*, **227**, 1947, 1020, *Contr. I. A. P.*, A 34.
- [17] KUIPER C. P., *Ap. J.*, **88**, 1938, 472.
- [18] LE CAINE, *Phys. Rev.*, **72**, 1947, 550. — *National Research Council of Canada, declassified publication.*
- [19] MARK, *Phys. Rev.*, **72**, 1947, 558.
- [20] MENZEL D., SEN H. K., *Ap. J.*, **110**, 1949, 1.
- [21] MILNE E. A., *M. N.*, **81**, 1921, 361, 375. — *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.*, **223**, 1922, 201 ; **228**, 1929, 421.
- [22] MICHARD R., *C. R. Acad. Sci.*, **229**, 1929, 702 ; *Ann. Astroph.*, **12**, 1949, 143, *Contr. I. A. P.*, A 39.
- [23] MORGAN W., KEENAN P., KELLMANN E., *An atlas of Stellar Spectra*, Chicago Univ. Press, 1942.
- [24] MÜNCH G., *Ap. J.*, **106**, 1947, 217.
- [25] MUSTEL E. R., *Astr. J. U. R. S. S.*, **17**, 1940, 2 ; **18**, 1941, 4 ; *Public. Sternberg. St. astr. inst.*, 1940, *U. R. S. S.*
- [26] PANNEKOEK A., *Publ. Astr. Inst. Amst.*, n° 4.
- [27] PECKER J. C., *C. R. Acad. Sci.*, **226**, 1948, 561, *Contr. I. A. P.*, A 15.
- [28] PECKER J. C., *C. R. Acad. Sci.*, **226**, 1948, 1889, *Contr. I. A. P.*, A 19.
- [29] PECKER J. C., *Ann. Astroph.*, **12**, 1949, 1, *Contr. I. A. P.*, B 33.
- [30] PECKER Ch., PECKER J. C., *Ann. Astroph.*, **12**, 1949, 197, *Contr. I. A. P.*, B 38.
- [31] PLACZEK G., The functions $E_n(x)$. Nat. Res. Counc. Canada. *Atom. En. MT* 1, Chalk river, Ontario.

- [32] REDMAN R. O., *M. N.*, **103**, 1943, 173.
- [33] ROSSELAND S., *M. N.*, **84**, 1924, 524.
- [34] RUDKJØBING M., *Publ. og. mindre. Medd. Køb.*, Obs. n° 145.
- [35] RUDKJØBING M., *Ann. Astroph.*, **9**, 1946, 7. *P. Mind. Medd. Køb. Obs.*, n° 143.
- [36] SCHATZMAN E., *C. R. Acad. Sci.*, **228**, 1948, 738.
- [37] SCHWARZSCHILD K., *Gött. Nachr.*, 1906, 41 ; *Berl. Sitzgsber.*, 1914, 1183.
- [38] SCHWARZSCHILD M., *Ap. J.*, **107**, 1948, 1.
- [39] STRÖMGREN B., *Astron. J.*, **53**, 1948, 107 ; et communication privée.
- [40] UNSÖLD A., *Physik der Sternatmosphären*, Berlin, Springer, 1938.
- [41] UNSÖLD A., *Z. f. Astroph.*, **24**, 1948, 363.
- [42] UNSÖLD A., *Z. f. Astroph.*, **25**, 1948, 340.
- [43] V. DE HULST H. C., *Ap. J.*, **107**, 1948, 220.

II. — La polarisation par les électrons libres et le type spectral

par Jean-Claude PECKER

(Institut d'Astrophysique)

SOMMAIRE. — *La polarisation par les électrons libres (dans le cas où intervient également l'absorption)*

est étudiée par la méthode de CHANDRASEKHAR, dans le cas où $\lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa}$ est indépendant de la profondeur optique, ou au contraire varie, par paliers ou d'une façon quelconque.

L'équation « caractéristique » est alors du 2^e ordre par rapport aux fonctions D_m , contrairement à ce qui a lieu dans les cas examinés par CHANDRASEKHAR : ce fait entraîne l'impossibilité d'étendre au problème posé la solution « à l'approximation infinie » d'AMBARZUMIAN-CHANDRASEKHAR.

Les résultats ont été appliqués numériquement (à l'approximation $n = 2$ ou $n = 3$) aux cas de la photosphère solaire, de la chromosphère solaire, et des étoiles de type spectral moins avancé que A_2 . On trouve un accord satisfaisant entre ces valeurs théoriques et les données expérimentales de LYOT (soleil) et de HILTNER (étoiles). Le taux de polarisation est donc un critère spectral qui semble utilisable.

1. — Un cas particulièrement intéressant du transfert de la radiation dans les étoiles (surtout les étoiles chaudes), est celui qui fait intervenir non seulement l'intensité de la lumière, mais aussi les deux composantes polarisées de cette lumière.

CHANDRASEKHAR [2] a analysé théoriquement cet effet dans le cas où, dans le transfert de la radiation, n'intervient que la diffusion par les électrons libres à l'exclusion de toute absorption, même grise.

Un essai de vérification expérimentale a été fait à Yerkes Observatory [8] sur des variables à éclipses, les résultats ayant été publiés par HILTNER [7].

L'effet de polarisation par les électrons libres a été également observé dans le cas solaire par LYOT [11] et dans une courte note, préliminaire au présent travail, l'auteur en a donné une interprétation quantitative [13].

Nous nous proposons ici de développer l'aspect théorique du problème par la méthode classique de CHANDRASEKHAR (cas gris) lorsque l'absorption grise joue également un rôle dans le transfert⁽¹⁾.

(1) Le Pr S. CHANDRASEKHAR — et je l'en remercie bien sincèrement — m'a fait remarquer : — qu'un travail analogue au mien est publié par A. CODE [Ap. J., 112 (1950) 22] (travail cependant postérieur à [13]) — et que l'équation caractéristique (14) est la même que celle publiée par lui-même ([5] page 285, éq. 246) dans une étude concernant le problème du transfert de la lumière polarisée, lorsque le taux de dépolarisation est différent de zéro. Ses conclusions sont identiques à celles que j'ai données à la fin du § 15. (Note ajoutée à la correction des épreuves.)

Le problème consiste en l'évaluation d'un terme correctif. Nous avons donc là, un bon exemple d'un cas où le problème *réel* est suffisamment résolu par une solution « grise ».

Ce problème pouvait évidemment se résoudre de façon plus rigoureuse (méthode de STRÖMGREN, cas non gris [18]) ou plus rapide (méthode variationnelle de KOURGANOFF, cas gris [9]). On a choisi la méthode de CHANDRASEKHAR afin d'en montrer certaines limites. De plus, c'est à la résolution d'un problème assez voisin de celui qui nous préoccupe, quoique moins général, que son auteur l'a appliquée.

L'extrême précision obtenue par LYOT dans le cas solaire, laisse espérer malgré les difficultés actuelles, qu'il sera possible de déterminer par une telle mesure le *type spectral* d'une étoile. Nous montrerons quel est l'effet que l'on peut prévoir pour une étoile de type déterminé. Cet effet est beaucoup plus faible, même pour les étoiles de type 0, que celui qu'a calculé CHANDRASEKHAR dans le cas limite d'une étoile infiniment chaude.

PREMIÈRE PARTIE

POLARISATION DU RAYONNEMENT CONTINU (CAS GRIS).

APPROXIMATION D'ORDRE n .

A) Les équations de transfert.

2. — CHANDRASEKHAR a calculé, dans le cas particulier de la diffusion sans absorption, les formes des équations de transfert valables pour les deux composantes de la lumière polarisée.

La forme des fonctions-sources de diffusion, que nous empruntons au mémoire de CHANDRASEKHAR, est donnée par les relations

$$(1) \quad J_l = \frac{3}{4} [2(\bar{I}_l - K) + \mu^2(3K - 2\bar{I}_l + \bar{I}_r)]$$

$$(2) \quad J_r = \frac{3}{3} [\bar{I}_r + K].$$

Les indices l et r désignant respectivement les deux composantes : le vecteur électrique vibre dans le plan méridien ou perpendiculairement à ce plan. $\bar{I}$ et K sont les quantités classiques définies au chapitre I (formules (3)).

Dans le cas plus général où $\lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa} \neq 1$ (*) on peut écrire les équations de transfert sous la forme :

$$(3) \quad \begin{cases} \mu \frac{dI_l}{d\tau} = I_l - (1 - \lambda) \frac{B}{2} - \lambda J_l = I_l - S_l \\ \mu \frac{dI_r}{d\tau} = I_r - (1 - \lambda) \frac{B}{2} - \lambda J_r = I_r - S_r \end{cases}$$

(*) L'attention du lecteur est attirée sur une confusion possible entre les deux significations du symbole λ : $\lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa}$ et λ longueur d'onde.

où B désigne l'« Ergiebigkeit » (qui est la fonction de PLANCK intégrée) et S_l et S_r les deux fonctions-sources.

L'équation de conservation du flux total s'écrit en transformant l'équation de transfert de l'intensité totale :

$$(4) \quad \mu \frac{dI}{d\tau} = I - (1 - \lambda)B - \lambda(J_l + J_r) \quad \text{où} \quad I = I_r + I_l.$$

La conservation du flux se traduit par

$$(5) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu = \int_{-1}^{+1} I d\mu - (1 - \lambda)B \int_{-1}^{+1} d\mu - \lambda \int_{-1}^{+1} (J_l + J_r) d\mu = 0.$$

soit, après réductions

$$(6) \quad B = \bar{I}_r + \bar{I}_l = \bar{I}.$$

Par suite, les équations de transfert peuvent s'écrire

$$(7) \quad \begin{cases} \mu \frac{dI_l}{d\tau} = I_l - \frac{\bar{I}_l + \bar{I}_r}{2} + \lambda \left[\frac{\bar{I}_r}{2} - \bar{I}_l + \frac{3K_l}{2} - \frac{3}{4} \mu^2 (3K_r - 2\bar{I}_l + \bar{I}_r) \right] \\ \mu \frac{dI_r}{d\tau} = I_r - \frac{\bar{I}_r + \bar{I}_l}{2} + \lambda \left[\frac{2\bar{I}_l - \bar{I}_r}{4} - \frac{3}{4} K_l \right]. \end{cases}$$

Nous les résoudrons par la méthode de WICK-CHANDRASEKHAR. Nos notations seront légèrement différentes de celles de CHANDRASEKHAR en raison de la plus grande complication des équations et de la nécessité d'une notation plus touffue.

B) *Résolution des équations de transfert: cas où $\lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$ est constant.*

3. — Nous poserons

$$(8) \quad \begin{cases} 2K_l = \sum_{-n}^{+n} a_j I_{lj} \mu_j^2 \\ 2\bar{I}_l = \sum_{-n}^{+n} a_j I_{lj} \end{cases}$$

en remplaçant les intégrales par des sommes. Le nombre n sera arbitraire. La solution ainsi calculée sera celle de l'approximation n . Les μ_j sont les $2n$ racines des polynômes de LEGENDRE d'ordre n et les a_j les poids correspondants.

Les μ_j et a_j sont connus et tabulés pour un grand nombre de valeurs de n [12] ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ces quantités vérifient un certain nombre de relations utiles, que nous utiliserons dans la suite des calculs, ainsi

$$(I) \quad a_j = a_{-j}$$

$$(II) \quad -\mu_j = \mu_{-j}$$

$$(III) \quad \sum_{-n}^{+n} a_j \mu_j^m = \frac{1}{m+1}$$

$$(IV) \quad \sum_{-n}^{+n} a_j = 1$$

$$(V) \quad \sum_{-n}^{+n} a_j \mu_j^2 = \frac{1}{3} \quad \text{etc...}$$

$$(VI) \quad D_m = \sum_{-n}^{+n} \frac{a_j \mu_j^m}{1 + \mu_j^2 k} = 2 \sum_{-n}^{+n} \frac{a_j \mu_j^m}{1 - \mu_j^2 k^2}$$

$$(VII) \quad D_{2m} = \frac{1}{k^2} \left(D^{2m-2} - \frac{2}{2m-1} \right)$$

$$(VIII) \quad D_{2m-1} = -k D_{2m}.$$

Nous poserons

$$(9) \quad \begin{cases} I_{ii} = g_i e^{-k\tau} \\ I_{ri} = h_i e^{-k\tau} \end{cases}$$

A condition de supposer λ *constant*, on obtient en substituant les équations ci-dessus dans les équations de transfert, deux équations de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} g_i = \frac{\alpha \mu_i^2 + \beta}{1 + \mu_i k} \\ h_i = \frac{\gamma}{1 + \mu_i k} \end{cases}$$

où α , β , γ sont indépendants de μ :

Ces deux équations doivent être vérifiées quel que soit μ :

On voit immédiatement qu'elles sont équivalentes aux trois équations

$$(11) \quad \alpha[(1 + 2\lambda)D_2 + 3\lambda D_4] + \beta[(1 + 2\lambda)D_0 + 3\lambda D_2 + 4] + \gamma[(1 - \lambda)D_0] = 0$$

$$(12) \quad \alpha[9\lambda D_4 + 6\lambda D_2 + 8] + \beta[9\lambda D_2 + 6\lambda D_0] + \gamma[3\lambda D_0] = 0$$

$$(13) \quad \alpha[2(1 - \lambda)D_2 + 3\lambda D_4] + \beta[2(1 - \lambda)D_0 + 3\lambda D_2] + \gamma[-8 + (2 + \lambda)D_0] = 0$$

équations homogènes et linéaires devant avoir des solutions non nulles ; le déterminant du système doit donc être nul. Celui-ci, toutes réductions faites, devient

$$(14) \quad 16(\lambda - 1)[2 - D_0] - 9\lambda \left[\frac{4}{3} - D_0 + D_2 \right] \left[\frac{8}{3} - D_0 + D_2 \right] = y = 0.$$

Dans les cas simples $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ déjà envisagés par CHANDRASEKHAR [2], [3], nous retrouvons bien la forme des solutions de cet auteur.

Après multiplication par $\prod_1^n (1 - \mu_j^2 k^2)^2$, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(15) \quad y = (\lambda - 1)y' - \lambda y''$$

où y' et y'' sont des polynômes de degré $2n$ en k^2 .

4. — Nous connaissons les racines , calculées par CHANDRASEKHAR, des polynômes :

$$(16) \quad \begin{cases} y'' = 0 & [2] \\ y' = 0 & [3]. \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire les racines de y , au moyen d'une méthode de résolution numérique des équations basée sur une construction graphique simple à condition que λ soit très petit (cas solaire) ou voisin de 1 (cas des étoiles chaudes).

Dans d'autres cas, il nous faudra résoudre réellement l'équation aux k .

a) Dans le cas solaire, les racines k^2 de y sont voisines des racines k'^2 connues de y'

$$(17) \quad k^2 = k'^2 + 2p' \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{avec} \quad 2p' = \frac{y''(k'^2)}{\frac{dy'}{dk'^2}(k'^2)}$$

comme on le voit sur la figure 1.

Les $2n$ racines seront alors de deux types

α) Si $k'^2 = \frac{\mu_2^2}{1}$, nous les désignerons par

K_p^2 (n racines de ce type).

β) Les n autres racines k_p^2 correspondront aux n racines $k_p'^2$ de y' , tabulées pour les premières valeurs de n par CHANDRASEKHAR [3].

De plus, nous remarquerons que l'une des racines $k_p'^2$ est nulle; y'' admettant aussi la racine $k_p'^2 = 0$, y admettra donc toujours une racine nulle.

b) Dans le cas des étoiles, les racines k^2 de y sont voisines des racines k''^2 de $y'' = 0$:

$$(18) \quad k^2 = k''^2 + 2p'' \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

$$\text{avec} \quad 2p'' = \frac{\frac{dy''}{dk''^2}(k''^2)}{y'(k''^2)}$$

Ici encore, comme dans le cas $\lambda = 1$ étudié par CHANDRASEKHAR, nous aurons deux types de racines : n racines K_p et $(n - 1)$ racines k_p .

5. — Connaissant maintenant les k , nous en déduirons les D et par suite α , β et γ , au moyen des relations suivantes qui se déduisent du système d'équations (11, 12, 13) en α , β , γ

$$(19) \quad \begin{cases} \alpha = 9\lambda D_0 \left(D_0 - D_2 - \frac{4}{3} \right) \\ \beta = -9\lambda D_0 \left(D_0 - D_2 - \frac{4}{3} \right) \frac{1}{k^2} + 8D_0(\lambda - 1) \\ \gamma = 18\lambda \left(D_0 - D_2 - \frac{4}{3} \right) \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{k^2} \right) - 8(\lambda - 1)(D_0 - 4). \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'on retrouve dans les cas particuliers $\lambda = 1$, et $\lambda = 0$, les mêmes relations entre α , β , γ de CHANDRASEKHAR.

De plus, quel que soit λ , il est facile de voir que :

$$(20) \quad \alpha + \beta - \gamma = 0 \quad \text{pour toutes les } k \text{ solutions}$$

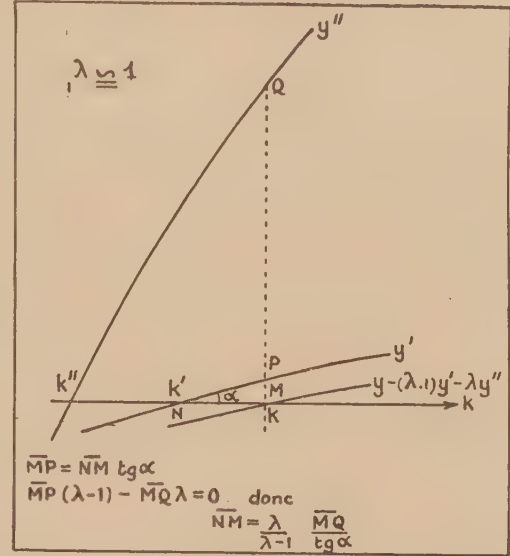


FIG. 1. — Calcul de k (cas des étoiles chaudes : $\lambda \cong 1$).

Dans le cas solaire ($\lambda \cong 0$), il faut intervertir λ et $\lambda - 1$, y' et y'' , k' et k'' pour trouver le résultat correspondant.

en combinant les équations précédentes, les relations de la note de la page 3, et l'équation aux k .

On obtient de plus :

$$(21) \quad \gamma = \alpha \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) + 8(\lambda - 1)D_0$$

$$(22) \quad \beta = -\frac{\alpha}{k^2} + 8D_0(\lambda - 1).$$

C) *Conditions aux limites.*

6. — Nous avons maintenant résolu le problème du calcul de I_{li} et I_{ri} . La solution générale des équations de transfert s'écrira, si nous tenons compte de la solution particulière :

$$(23) \quad I_{li} = I_{ri} = b(\tau + \mu_i + Q)$$

et en remarquant que les α , β , γ ne dépendent des k que par l'intermédiaire des k^2 :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{li} = b \left[\tau + \mu_i + Q + \sum_1^{n-1} \left(\frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 + \mu_i k_p} L_p \exp(-k_p \tau) + \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 - \mu_i k_p} L_{-p} \exp(k_p \tau) \right) \right. \\ \left. + \sum_1^n \left(\frac{A_p \mu_i^2 + B_p}{1 + \mu_i K_p} M_p \exp(-K_p \tau) + \frac{A_p \mu_i^2 + B_p}{1 - \mu_i K_p} M_{-p} \exp(K_p \tau) \right) \right] \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{ri} = b \left[\tau + \mu_i + Q + \sum_1^{n-1} \left(\frac{\gamma_p L_p}{1 + \mu_i k_p} \exp(-k_p \tau) + \frac{\gamma_p L_{-p}}{1 - \mu_i k_p} \exp(k_p \tau) \right) \right. \\ \left. + \sum_1^n \left(\frac{\Gamma_p}{1 + \mu_i K_p} M_p \exp(-K_p \tau) + \frac{\Gamma_p}{1 - \mu_i K_p} M_{-p} \exp(K_p \tau) \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

La valeur unique Q correspond en fait à la « fusion » des deux solutions L_{-n} et L_{+n} correspondant aux deux solutions confondues $k^2 = 0$.

7. — Les différentes constantes seront déterminées par les conditions aux limites suivantes :

a) pour τ croissant indéfiniment, les intensités ne devront pas croître exponentiellement (ce qui serait contradictoire avec la condition de constance du flux). On aura donc :

$$(26) \quad \left. \begin{aligned} L_{-p} &= 0 \\ M_{-p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

b) pour $\tau = 0$ (« surface » de l'étoile), tout le rayonnement sort de l'étoile. On devra donc avoir :

$$(27) \quad I_{l,-i}(\tau = 0) = I_{r,-i}(\tau = 0) = 0.$$

soit :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} -\mu_i + Q + \sum_1^{n-1} \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 - \mu_i k_p} L_p + \sum_1^n \frac{A_p \mu_i^2 + B_p}{1 - \mu_i K_p} M_p &= 0 \\ -\mu_i + Q + \sum_1^{n-1} \frac{\gamma_p}{1 - \mu_i k_p} L_p + \sum_1^n \frac{\Gamma_p}{1 - \mu_i K_p} M_p &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces $2n$ équations fourniront les nM_p , les $(n-1) L_p$, et Q .

Quant à la constante b , elle sera déterminée par la valeur constante du flux total sortant. Il est aisé de voir que :

$$(29) \quad b = \frac{3}{8} F.$$

En effet :

$$(30) \quad F = F_l + F_r = 2[\Sigma a_i I_{li} \mu_i + \Sigma a_i I_{ri} \mu_i].$$

Cette équation reste valable pour τ très grand (conservation du flux) et par suite

$$(31) \quad F = 4 \sum_{-n}^{+n} a_i b (\tau + \mu_i + Q) \mu_i = 4 \sum_{-n}^{+n} a_i \mu_i^2 b = 4b \frac{2}{3} = \frac{8}{3} b.$$

D) Solution des équations de transfert.

8. — Pour passer des expressions de I_{li} et I_{ri} à $I_l(\tau, \mu)$ et $I_r(\tau, \mu)$, où μ peut prendre une valeur quelconque, nous pourrions calculer $\bar{I}_l(\tau)$, $\bar{I}_r(\tau)$, $K_l(\tau)$, $K_r(\tau)$ puis les intensités par les formules :

$$(32) \quad \begin{cases} \mu > 0 & I_+(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\infty} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu} \\ \mu < 0 & I_-(\tau, \mu) = - \int_0^{\tau} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{\tau-t}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu}. \end{cases}$$

On voit d'après les équations nos (1, 2, 3, 24, 25) que $S(\tau, \mu)$ est de la forme

$$(33) \quad S(\tau, \mu) = A\tau + B + \Sigma C_p \exp(-k_p \tau) + \mu^2 \Sigma C'_p \exp(-k_p \tau)$$

où $A, B, \dots$ sont des coefficients indépendants de τ et μ , et calculables au moyen des expressions déjà utilisées.

I_+ sera donc de la forme

$$(34) \quad I_+(\tau, \mu) = g(\tau, \mu) = A(\tau + \mu) + B + \Sigma(C_p + \mu^2 C'_p) \frac{\exp(-k_p \tau)}{1 + \mu k_p}.$$

$I_-(\tau, \mu)$ sera de la forme $g(\tau, \mu) - \exp\left(\frac{\tau}{\mu}\right) g(0, \mu)$ qui se déduit aussitôt des équations ci-dessus et de

$$(35) \quad I_+(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu}.$$

9. — La fonction $g(\tau, \mu)$ sera facile à calculer grâce à l'artifice suivant utilisant les propriétés des polynômes.

En effet $g(\tau, \mu) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \mu k_{pi}) \prod_{i=1}^n (1 + \mu K_{pi})$ est un polynôme de degré $2n$.

Si nous considérons maintenant les fonctions analogues à celles introduites par CHANDRASEKHAR.

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}_l(\tau, \mu) &= \frac{3}{8} F \left[\tau + Q + \mu \sum_1^{n-1} \frac{\alpha_p \mu^2 + \beta_p}{1 + \mu k_p} L_p \exp(-k_p \tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^n \frac{(A_p \mu^2 + B_p)}{1 + \mu K_p} M_p \exp(-K_p \tau) \right] \\ \mathcal{S}_r(\tau, \mu) &= \frac{3}{8} F \left[\tau + Q + \mu + \sum_1^n \frac{\gamma_p L_p}{1 + \mu k_p} \exp(-k_p \tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^n \frac{L_p}{1 + \mu K_p} M_p \exp(-K_p \tau) \right]. \end{aligned} \right.$$

Le produit $\mathcal{S}(0, \mu) \prod_1^{n-1} (1 + \mu k_p) \prod_1^n (1 + \mu K_p)$ est un polynôme de degré $2n$ qui est égal à zéro pour les n valeurs μ_i de la variable μ et à $1(0, -\mu_i) \prod_1^{n-1} (1 - \mu_i k_p) \prod_1^n (1 - \mu_i K_p)$ pour les n valeurs $\mu = -\mu_i$, tout comme le produit $g(0, \mu) \prod_1^{n-1} (1 + \mu k_p) \prod_1^n (1 + \mu K_p)$.

Donc, on a

$$\mathcal{S}(\tau, \mu) \equiv g(\tau, \mu).$$

La solution générale est donc :

$$(37) \quad \begin{cases} I_{+l}(\tau, \mu) = \mathcal{S}_l(\tau, \mu) \\ I_{+r}(\tau, \mu) = \mathcal{S}_r(\tau, \mu) \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} L_{-l}(\tau, \mu) = \mathcal{S}_l(\tau, \mu) - \exp\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \mathcal{S}_l(0, \mu) \\ L_{-r}(\tau, \mu) = \mathcal{S}_r(\tau, \mu) - \exp\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \mathcal{S}_r(0, \mu). \end{cases}$$

E) *Étude du cas où λ varie avec la profondeur τ .*

10. — Nous avons dans tout ce qui précède, supposé $\lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$ constant.

En fait, on peut étendre la résolution des équations de transfert au cas où λ est une fonction de la profondeur τ et tout d'abord au cas où λ varie par paliers constants au nombre de $m + 1$.

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \text{ si } \tau < \tau_1 \\ \lambda &= \lambda_i \text{ si } \tau_i < \tau < \tau_{i+1} \\ \lambda &= \lambda_m \text{ si } \tau > \tau_m. \end{aligned}$$

Dans chaque intervalle, la solution de l'équation de transfert est la même que plus haut, mais il n'est plus obligatoire que les coefficients des termes en exponentielles croissantes avec τ soient nuls. Entre chaque *discontinuité*, nous aurons une expression pour $I_{l,i}^s$ et $I_{r,i}^s$, s désignant le rang de l'intervalle ($s = 0, 1, \dots, m$).

Les conditions aux limites seront alors :

$$\begin{aligned} \text{au point } \tau = 0 & \quad 2n \text{ équations} & \quad I_{l,-i}^0(0) = I_{r,-i}^0(0) = 0 & \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{au point } \tau = \tau_1 & \quad 2 \times 2n \text{ équations} & \quad \begin{cases} I_{l,i}^0(\tau_1) = I_{l,i}^1(\tau_1) \\ I_{r,i}^0(\tau_1) = I_{r,i}^1(\tau_1) \end{cases} & \quad (i = -n: -n+1, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n) \end{aligned}$$

Enfin $(n-1)$ termes L_- et n termes M_- de $I_{r,i}^m$ et $I_{l,i}^m$ sont nuls puisque $I_{r,i}^m(\infty)$ doivent être finis (pas de termes exponentielles croissants).

Il y a donc

$$\begin{array}{ccc} m+1 & \text{coefficients } Q & \\ (m+1)(2n-2) - (n-1) & L & \\ (m+1) \quad 2n - (n) & M & \end{array}$$

soit, en tout, $m(4n-1) + 2n$ coefficients à déterminer. Or, nous disposons de $m \times 4n + 2n$ équations, soit de m équations de plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer les coefficients Q, L, M .

Il faut montrer que ces m équations sont des combinaisons des $m(4n-1) + 2n$ restantes.

En effet, dans les $4n$ équations au point τ_{s+1} le déterminant des $2n$ M^s , $(2n-2)$ L^s , Q^s est nul.

Considérons les colonnes correspondant aux inconnues $L_{p,i}^s$ et L_s

$$\begin{array}{l} n \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 + \mu_i k_p} \exp(-k_p \tau_{s+1}) \dots \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 - \mu_i k_p} \exp(k_p \tau_{s+1}) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 - \mu_i k_p} \exp(-k_p \tau_{s+1}) \dots \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 + \mu_i k_p} \exp(k_p \tau_{s+1}) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\gamma_p}{1 + \mu_i k_p} \exp(-k_p \tau_{s+1}) \dots \frac{\gamma_p}{1 - \mu_i k_p} \exp(k_p \tau_{s+1}) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\gamma_p}{1 - \mu_i k_p} \exp(-k_p \tau_{s+1}) \dots \frac{\gamma_p}{1 + \mu_i k_p} \exp(k_p \tau_{s+1}) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

Mettons $\exp(-k_p \tau_{s+1})$ et $\exp(k_p \tau_{s+1})$ en facteur. Multiplions chaque ligne d'indice i par a_i et sommions les lignes ; puis multiplions-les par $a_i \mu_i^2, \dots, a_i \mu_i^{8n-2}$ et sommions encore les lignes.

Nous aurons alors un déterminant où les deux colonnes d'ordre p correspondantes seront identiques (chaque terme étant une même combinaison des $D_m(k_p^2)$).

Le déterminant sera donc nul.

Par suite, chacun de ces systèmes de $4n$ équations aux limites s'abaissera d'une équation au moins.

Donc, on aura au moins m équations inutiles, puisqu'il y a m discontinuités.

Chaque groupe de $4n$ équations au point τ_{s+1} détermine les L^s, M^s, Q^s en fonction des $L^{s+1}, M^{s+1}, Q^{s+1}$. Les $2n$ dernières équations, (en $\tau = 0$) détermineront les $L^{m+1}, M^{m+1}, Q^{m+1}$ qui sont bien au nombre de $2n$ en raison des conditions aux limites à l'infini. Nous le verrons dans une application numérique de la méthode au cas de la chromosphère solaire.

11. — On peut aussi supposer que λ est une fonction de τ variant de façon continue. Dans ce cas, la théorie de la résolution des équations de transfert n'est plus possible, car les g_i, h_i, k dépendent de τ d'après (10) et le calcul fait n'est plus valable.

Pourtant, définissons-nous une loi $\lambda(\tau)$ et admettons que α, β, γ, k soient donnés à partir de λ donc de τ par les mêmes relations que dans le cas $\lambda(\tau) = \text{cte}$.

Donnons-nous les $4n I_i$ par les relations connues où $\alpha, \beta, \gamma, k, L, M, Q$ seront des fonctions inconnues de τ ; portons cette expression dans les équations de transfert. On voit que ces $2n$ équations de transfert relient donc :

$$\frac{dQ}{d\tau}, (n-1) \left[\frac{dL_p}{d\tau} + k_p L_p \right], \quad \text{et } n \left[\frac{dM_p}{d\tau} + K_p M_p \right].$$

Les Q, L, M sont les seules inconnues. En effet $k_p(\tau)$ sera défini par l'équation caractéristique où λ est considéré comme variable, et $\alpha(\tau), \beta(\tau), \gamma(\tau)$ seront définies aussitôt (voir plus haut, équations 14, 19).

Donc en fait, ce sont $2n$ équations différentielles linéaires à $2n$ inconnues. De ces $2n$ équations, on tirera L, M, Q en fonction de τ et de $2n$ constantes arbitraires, déterminées par les $2n$ équations aux limites

$$I_{i,-i}(\tau = 0) = I_{r,-i}(\tau = 0) \quad \text{à la surface}$$

(La condition à l'infini est remplie puisque nous avons d'emblée posé $M_{-p} = L_{-p} = 0$; sans cette hypothèse nous aurions eu trop d'inconnues.)

12. — Dans les deux cas, il nous faut encore calculer la constante b .

Dans le cas $\lambda = \text{cte}$, on a vu que $b = \frac{3}{8}F$. Calculons F dans le cas général

$$(38) \quad F = F_l + F_r = 2 \left[\sum_1^n a_i I_{li} \mu_i + \sum_1^n a_i I_{ri} \mu_i \right]$$

$$(39) \quad I_{li} = b \left[\tau + \mu_i + Q(\tau) + \sum \frac{\alpha_p \mu_i^2 + \beta_p}{1 + \mu_i k_p(\tau)} L_p(\tau) \exp \left(- \frac{1}{\mu_i k_p(\tau)} \right) + \dots \right].$$

Ceci reste valable pour τ grand ($\tau \rightarrow \infty$)

$$(40) \quad I_{i,i} \rightarrow b [\tau + \mu_i + Q(\tau)].$$

Dans ce cas, on a comme plus haut

$$(41) \quad F - \frac{8}{3} b \rightarrow 0 \quad \text{donc à l'infini } b = \frac{3}{8} F.$$

Ceci est valable, quel que soit λ , et par suite, comme F est constant, que b est indépendant de τ , on a bien

$$b = \frac{3}{8} F.$$

13. — Pourtant, bien que le problème soit soluble quel que soit λ , nous ne donnerons aucune application numérique de la méthode du § 11. En effet, les méthodes citées dans l'introduction sont aussi simples à mettre en œuvre que cette généralisation ardue d'un problème gris. Il suffira de savoir que la résolution de l'équation de transfert est d'une très grande généralité.

DEUXIÈME PARTIE

CALCUL PRATIQUE DE L'ASSOMBRISSEMENT.

SOLUTION A L'APPROXIMATION INFINIE

14. — Dans les exemples [2, 5] donnés par CHANDRASEKHAR, il était toujours possible de calculer les coefficients L_p , M_p , Q en utilisant certaines propriétés des fonctions $\mathcal{S}(\mu)$. Il n'est plus possible ici de le faire, en raison de l'intervention dans $\mathcal{S}(\mu)$ de $2n - 1$ dénominateurs. (Dans l'étude de CHANDRASEKHAR seulement n au plus dénominateurs s'introduisaient, le nombre de coefficients étant cependant $2n$).

Adoptons les définitions

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{ll} R(\mu) = \prod_{\alpha=1}^n (1 - K_{\alpha}\mu) & R_{\alpha}(\mu) = \prod_{\alpha \neq \alpha}^n (1 - K_{\alpha}\mu) \\ \rho(\mu) = \prod_{\beta=1}^{n-1} (1 - k_{\beta}\mu) & \rho_{\beta}(\mu) = \prod_{\beta \neq \beta}^n (1 - k_{\beta}\mu) \\ P(\mu) = \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i). \end{array} \right.$$

En multipliant $\mathcal{S}(\mu)$ par le produit des dénominateurs qui y jouent un rôle, on obtient, dans le cas examiné par CHANDRASEKHAR

$$(43) \quad \rho(\mu) \mathcal{S}_i(\mu) = \sigma P(\mu)$$

$$(44) \quad \text{et } R(\mu) \mathcal{S}_r(\mu) = (-1)^{n+1} K_1 K_2 \dots K_n P(\mu)(\mu + c).$$

Le fait que dans les polynômes $\mathcal{S}_i(\mu)\rho(\mu)$; $\mathcal{S}_r(\mu) R(\mu)$ les coefficients inconnus σ et c soient à la fois ceux des termes de plus bas degré et ceux de degré n , permet

d'obtenir certaines relations entre les coefficients qu'il est impossible d'avoir dans le cas général examiné par nous. En effet, dans le cas général, on est obligé d'écrire, pour supprimer les dénominateurs :

$$(45) \quad \mathcal{S}(\mu) R(\mu) \rho(\mu) = P(\mu) \Pi(\mu)$$

où $\Pi(\mu)$ est un polynôme d'ordre n dont il faudrait connaître les coefficients pour calculer L, M, Q ; or il n'est nullement facile ni même sans doute possible à priori de déterminer ces coefficients.

Dans le cas général, il est donc nécessaire de résoudre les $2n$ équations (28)

$$(46) \quad \begin{cases} \mathcal{S}_l(0, -\mu_i) = 0 \\ \mathcal{S}_r(0, -\mu_i) = 0. \end{cases}$$

15. — La méthode d'AMBARZUMIAN [1], CHANDRASEKHAR [4] et [5] permet, on le sait de calculer $I(0, \mu)$ à l'approximation infinie. Mais l'intervention des fonctions $\mathcal{S}(\mu)$ dans les calculs nécessaires à l'application de cette méthode, nous laisse prévoir qu'il ne sera pas possible ici non plus, d'utiliser la méthode de CHANDRASEKHAR dans le cas général que nous étudions.

On le voit plus précisément lorsqu'on cherche à appliquer le calcul de CHANDRASEKHAR.

Il faut en effet introduire un *polynôme* $\psi(\mu)$ tel que l'équation caractéristique (équation aux k^2) puisse se mettre sous la forme :

$$(47) \quad 1 = 2 \sum_{j=n}^1 \frac{a_j \psi(\mu_j)}{1 - k^2 \mu_j^2}.$$

Or, il n'est possible de mettre l'équation caractéristique sous cette forme que si elle est une *fonction linéaire* des D_m . Ceci est vérifié dans tous les cas examinés par CHANDRASEKHAR, mais est inexact dans le cas que nous examinons où cette équation est *du second degré* en D_m (équation 14) et où il est évident qu'elle ne peut se réduire à 2 équations du 1^{er} degré que dans le cas examiné par CHANDRASEKHAR de la diffusion sans absorption.

Une telle circonstance peut se rattacher aux propriétés de la transformation de LAPLACE, utilisée par AMBARZUMIAN (on trouvera dans le traité de KOURGANOFF [9] un exposé de cet aspect de la méthode d'AMBARZUMIAN).

Constatons donc pour résumer :

Dans le cas général où l'équation caractéristique n'est pas du premier degré en D_m , il est impossible d'appliquer la méthode de Chandrasekhar (au moins sous la forme que lui a donnée son auteur), soit au calcul à priori des coefficients L, Q, M dans l'approximation d'ordre n , soit au calcul de $I(0, \mu)$ à l'approximation « infinie ».

TROISIÈME PARTIE

EXEMPLES NUMÉRIQUES : SOLEIL, ÉTOILES

A) Polarisation par les électrons de la photosphère solaire.

16. — Nous avons résolu, en 3^e approximation, le problème exposé ci-dessus dans le cas $\lambda = \text{cte}$ pour de petites valeurs de λ . Le calcul fournit donc, en fonction de λ et de μ la quantité accessible à l'expérience :

$$(48) \quad \delta = \frac{I_r(\tau, \mu) - I_l(\tau, \mu)}{I_r(\tau, \mu) + I_l(\tau, \mu)}.$$

Nous ne détaillerons pas ici les calculs.

Au bord du disque, la fraction de polarisation est la suivante :

$$(49) \quad \delta(\mu = 0) = 0,0822 \lambda + 0,1439 \lambda^2.$$

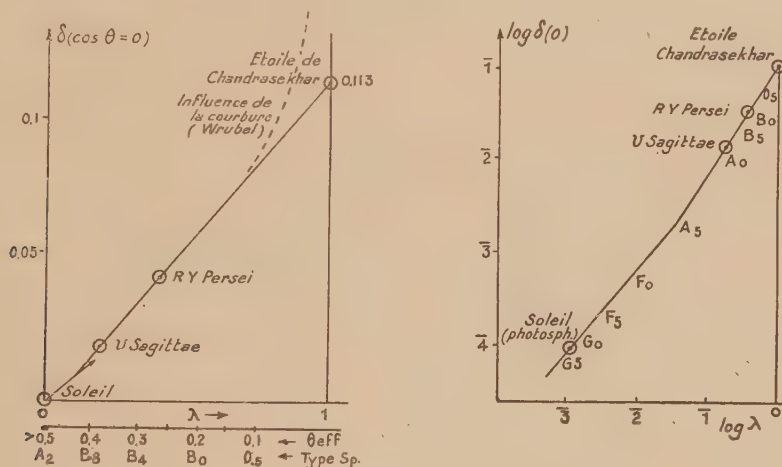


FIG. 2 et 2 bis. — Polarisation de la lumière et type spectral.

En un point quelconque du disque, cette fraction de polarisation s'écrira, en se limitant, au terme en λ

$$(50) \quad \delta = (1 - \mu^2) \lambda \frac{12 \left[\frac{L'_1}{1 + \mu K_1} + \frac{L'_1}{1 + \mu K_2} \right]}{2Q' + 2\mu - \frac{32 L'_1}{1 + \mu K_1} - \frac{32 L'_2}{1 + \mu K_2}}$$

où $L'_1, L'_2 \dots$ sont les $L_1, L_2 \dots$ calculés par CHANDRASEKHAR [3].

(Nos coefficient ont les valeurs

$$L_1 = (1 - \lambda) L'_1 + \lambda L_1.$$

Les figures 2 et 2 bis, et la figure 3 représentent respectivement la variation de δ en fonction de λ , et de $\frac{\delta(\mu)}{\delta(0)}$ en fonction de μ dans le cas solaire.

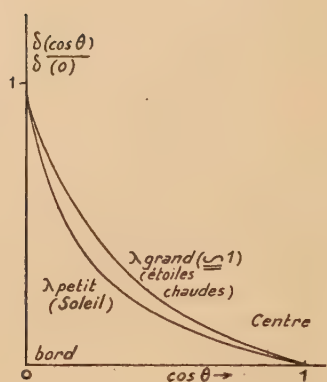


FIG. 3. — Polarisation entre le centre et le bord du disque stellaire (influence de la photosphère).

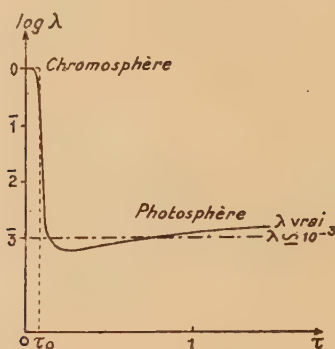


FIG. 4. — (L'échelle a été modifiée dans la partie chromosphérique : On rappelle que $\tau_0 \approx 0.003$.) Structure de l'atmosphère solaire.

Dans la photosphère solaire, on peut choisir $\lambda \approx 10^{-3}$ (fig. 4).

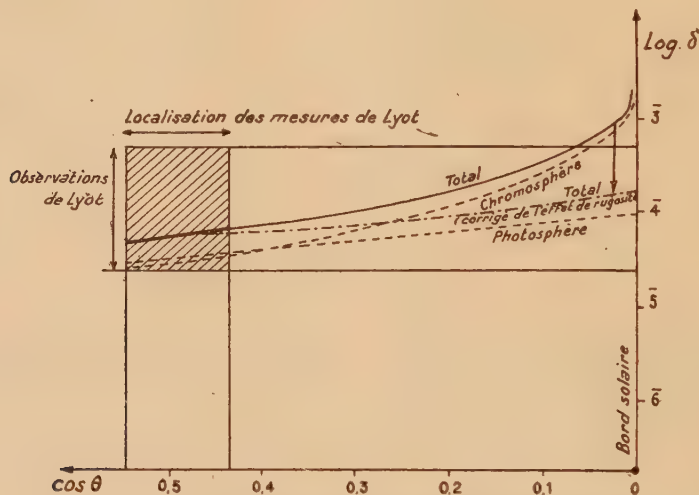


FIG. 5. — Polarisation au bord du disque solaire.

Sur la figure 5, on voit comment on peut comparer notre calcul et le résultat expérimental de LYOT :

δ compris entre 2.10^{-5} et 39.10^{-5} sur une portion circulaire de $1'$ de diamètre centrée à $2'$ du bord du disque solaire.

La concordance est satisfaisante, même si l'on corrige les mesures de LYOT de l'effet de « rugosité » qui semble affecter la surface solaire [17, 6, 15, 16].

B) Polarisation par les électrons libres de la chromosphère⁽¹⁾.

17. — On peut se demander si une chromosphère (couche de faible épaisseur

⁽¹⁾ Je dois au Pr A. UNSÖLD les remarques suivantes, dont je le remercie vivement :

Le rôle de la chromosphère est sans doute inférieur à celui qui est calculé ici : en effet, la suresti-

où λ est voisin de 1) ne peut pas contribuer de façon importante à la polarisation du rayonnement.

En vue d'une telle investigation, nous avons résolu en deuxième approximation le problème exposé ci-dessus, dans le cas où

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 & \text{pour } \tau > \tau_0 \text{ } (\tau_0 \text{ petit}) \\ \lambda &= 1 & \tau_0 > \tau > 0 \end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de conserver entre 0 et τ_0 les coefficients M_- et L_- correspondant aux exponentielles négatives.

Les équations des conditions aux limites sont

$$(51) \quad \begin{cases} I_l(0, -\mu_i) = 0 & (n \text{ équations}) \\ I_r(0, -\mu_i) = 0 & (n \text{ équations}) \\ I_l(\tau_0, \mu_i) = I_r(\tau_0, \mu_i) & (n \text{ équations}) \\ I_l(\tau_0, -\mu_i) = I_r(\tau_0, -\mu_i) & (n \text{ équations}). \end{cases}$$

Soit $4n$ équations à $4n - 1$ inconnues (Q , nM_+ , nM_- , $(n - 1)L_+$, $(n - 1)L_-$).

Comme nous l'avons déjà vu, ces équations sont en nombre surabondant, le calcul numérique a permis d'ailleurs de le vérifier. On remarque de plus que la solution est indépendante de ce qui se passe pour $\tau > \tau_0$ pourvu que λ soit nul dans cette région.

Dans ces conditions, on obtient pour $\tau_0 = 0.003$

$$(52) \quad \begin{cases} Q = 0,73032 \\ L_+ = -0,20818 & L_- = 0 \\ M_{+1} = 0,01985 & M_{-1} = 0,03023 \\ M_{+2} = -0,03620 & M_{-2} = 0. \end{cases}$$

L'expression de $I(0, \mu)$ ne s'obtient pas ici en remplaçant simplement μ_i par μ dans l'expression de $I(0, \mu_i)$. On a, en effet :

$$\begin{aligned} I_l(0, \mu) &= \int_0^{\tau_0} S_l e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} + \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} S e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} \\ I_r(0, \mu) &= \int_0^{\tau_0} S_r e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} + \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} S e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau < \tau_0 \quad & \begin{cases} S_l = \frac{3}{8} F \left[Q + \tau + (1 - \mu^2) \sum_1^{n-1} (L_{+p} e^{-k_p \tau} + L_{-p} e^{+k_p \tau}) + \sum_1^n (1 - \mu^2 K_p^2) [M_{+p} e^{-K_p \tau} + M_{-p} e^{+K_p \tau}] \right] \\ S_r = \frac{3}{8} F \left[Q + \tau + \sum_1^n (1 - K_p^2) [M_{+p} e^{-K_p \tau} + M_{-p} e^{+K_p \tau}] \right] \end{cases} \\ \tau > \tau_0 \quad & S_r = S_l = \frac{1}{2} S = \frac{3}{8} F \left[Q^1 + \tau + \sum_1^{n-1} L_{+p}^1 e^{-k_p \tau} \right]. \end{aligned}$$

mation vraisemblable de la température équivalant à une exagération de la zone où l'on peut prendre $\lambda = 1$, zone qui n'a probablement pas une profondeur optique de $\tau_0 = 0.003$.

En revanche la diffusion RAYLEIGH par les atomes étudiée à Kiel par le Dr H. VOIGT, ne doit pas être négligée devant la diffusion THOMPSON par les électrons. (Note ajoutée à la correction des épreuves.)

Par suite, on a dans I_l et I_r non pas des termes du type

$$\frac{1}{1 - \mu k}$$

qui donneraient une valeur infinie à l'intensité, mais des termes du type

$$\frac{1}{1 - \mu k} \left(1 - e^{-\frac{1\mu k}{\mu} \tau_0} \right) \text{ qui sont égaux à } \frac{\tau_0}{\mu} \text{ si } 1 - \mu k = 0.$$

On obtient alors pour δ une expression qui tend, au voisinage du bord, vers 0.113 (valeur de CHANDRASEKHAR), mais qui décroît très vite avec $\frac{1}{\mu}$

$$\delta = \frac{-(1 - \mu^2)}{4/3 I(0, \mu)/F} \left[\sum I_p \frac{1 - e^{-(k_p + \frac{1}{\mu}) \tau_0}}{1 + \mu k_p} + \sum K_p^2 \frac{M_+ \left(1 - e^{-(K + \frac{1}{\mu}) \tau_0} \right)}{1 + \mu K} + \sum_p^2 \frac{M_- \left(1 - e^{-(K - \frac{1}{\mu}) \tau_0} \right)}{1 - \mu K} \right].$$

Dans le cas étudié, et à condition que μ ne soit pas trop petit ($\mu > 0,005$) on a alors, après réductions :

$$\delta = \frac{3\tau_0^2(1 - \mu^2)}{2\mu I(0, \mu)/F} K_1^2 M_{-1}.$$

Dans la zone étudiée par LYOT, cet effet est de l'ordre de grandeur de l'effet photosphérique (fig. 5).

C) Étoiles.

18. — La figure 2 montre comment varie $\delta(\mu = 0)$ en fonction de λ . La courbe a été tracée en menant le point correspondant au cas limite des étoiles chaudes, la tangente à la courbe $\delta(\mu = 0)$ au voisinage de $\lambda = 0$.

Notons que dans ce cas limite, CHANDRASEKHAR a calculé la valeur :

$$\delta = 0.113 [2].$$

Mais, plus récemment, WRUBEL [21] a montré que dans le cas d'atmosphères sphériques, δ pouvait prendre des valeurs plus élevées ($\delta \simeq 0.20$). Cette remarque n'est toutefois valable que pour les étoiles de température très élevée (Wolf-Rayet ou étoiles O5).

Si l'on se souvient que $\lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$, on peut évaluer λ en fonction de la tempé-

rature effective, et en première approximation, du *type spectral*. Mais, dans une atmosphère, λ n'est pas constant et si l'on admet que $\lambda(T_e)$ fournit une valeur convenable de δ , on pourra alors évaluer $\delta(\mu = 0)$ *en fonction du type spectral*.

La mesure de cette polarisation pourrait être utilisée, dans la zone des étoiles chaudes comme critère du type spectral pour les étoiles doubles à éclipses.

- (56) On a $\sigma = 6.67 \cdot 10^{-25}$ par électron libre
 (57) $\bar{\kappa} = f(p, \theta)$ } donné par Strömberg (cas solaire [19]) $\theta > 0,5$
 (58) $p = f(p_e, \theta)$ } donné par l'auteur ⁽¹⁾ (étoiles B) $\theta < 0.3$
 avec $\theta = \frac{5040}{T}$.

De plus, la relation approximative :

$$(59) \quad p = \frac{g}{\bar{\kappa}} \tau$$

appliquée pour $\tau(T_e) \sim 0.667$

et

$$g = [4.5]$$

permet de déduire une relation entre κ et la pression correspondant à la couche où la température est la température effective.

Donc, pour chaque température effective, on peut avoir, en combinant cette relation et la relation (57) ci-dessus, la pression, l'opacité $\bar{\kappa}$ et en utilisant (56) et (58) la pression électronique, le coefficient de diffusion et enfin λ .

D'où le Tableau 1 et l'étalonnage de la courbe de la figure 5.

TABLEAU 1

θ	$\log p$	$\log p_e$	$\log \bar{\kappa}$	$\log \sigma$	λ	Type spectral (approximatif)
1	4.98	1.01	1.35	5.93	$0.380 \cdot 10^{-3}$	K ₀
0.9	4.86	1.11	1.46	4.15	$0.488 \cdot 10^{-3}$	G ₂
0.8	4.68	1.52	1.66	4.74	$0.120 \cdot 10^{-2}$	F ₇
0.7	4.27	1.98	0.06	3.61	$0.354 \cdot 10^{-2}$	F ₂
0.6	3.66	2.40	0.67	2.74	$0.116 \cdot 10^{-1}$	A ₇
0.5	3.02	2.59	1.30	1.47	$0.145 \cdot 10^{-1}$	A ₂
0.4	3.16	2.85	1.16	0.49	0.167	B ₈
0.3	3.59	3.26	0.76	0.50	0.357	B ₄
0.2	3.99	3.69	0.45	0.50	0.534	B ₀
0.1	4.30	4.00	0.01	0.50	0.759	O ₅
0				0.50	1.	WR ?

Selon KUPLER [10]
et UNSÖLD [20]

Le rôle de la chromosphère stellaire est d'autant plus négligeable que l'on se rapproche du cas des étoiles chaudes, cette zone ne devenant plus distincte de la photosphère pour ce qui concerne le calcul de λ .

(1) Les tables détaillées seront publiées en appendice au chapitre suivant, dans une publication séparée.

Un calcul plus précis demanderait à être fait dans chaque étude détaillée d'étoiles de type spectral donné, au moment où l'on aura calculé un modèle. De toutes façons, le calcul que nous montrons ici est lui-même encore prématuré dans l'état actuel des mesures de polarisation : si l'on avait voulu utiliser les mesures de LYOT pour déterminer le type du soleil, on lui aurait attribué un type compris entre K_0 et F_0 !

Remarquons que l'on peut s'expliquer les résultats de JANSSEN et de HILTNER [7] [8] qui avaient étudié une étoile de type B_9 (U Sagittae) et une de type B_4 (RY Persei), pour lesquelles on trouverait une polarisation de 2 % et 4,5 % au lieu de 11 % prévus par CHANDRASEKHAR pour $\lambda = 0$.

La polarisation trouvée dans le cas de RY Persei est même en excellent accord avec celle de notre calcul (HILTNER trouve $2,5 \log \delta = 1,05$; nous trouvons $2,5 \log \delta = 1,08$).

Manuscrit reçu le 14 mai 1950.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMBARZUMIAN V. A., *C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, **38**, 1943, 257 ; — *Russ. Astroph. J.*, **19**, 1942 ; — *J. Phys. Acad. Sci. U. R. S. S.*, **8**, 1944, 65.
- [2] CHANDRASEKHAR S., *Ap. J.*, **103**, 1946, 351, Radiative Equilibrium, paper X.
- [3] CHANDRASEKHAR S., *Ap. J.*, **100**, 1944, 76, Radiative Equilibrium, paper II.
- [4] CHANDRASEKHAR S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1947, 641.
- [5] CHANDRASEKHAR S., *Radiative transfer*, Oxford Univ. Pr. 1950.
- [6] EVANS D. S., *M. N.*, **107**, 1947, 433.
- [7] HILTNER, *Ap. J.*, **106**, 1947, 231.
- [8] JANSSEN E. M., Note on the polarisation of the continuous radiation of early types stars, *Ap. J.*, **103**, 1946, 380.
- [9] KOURGANOFF V., 1. Mémoires sur la méthode variationnelle de l'équation de transfert, *C. R. Acad. Sci.*, 22 décembre 1947 (cont. *IAP*, n° A 10) ; — *C. R. Acad. Sci.*, 3 novembre 1948 (cont. *IAP*, n° A 31) ; — *C. R. Acad. Sci.*, 24 janvier 1949 (cont. *IAP*, n° A 36) ; — 2. *Basic methods...*, Oxford University Press (sous presse).
- [10] KUIPER, *Ap. J.*, **88**, 1938, 429.
- [11] LYOT B., *C. R. Acad. Sciences*, **226**, 1948, 25, 137.
- [12] MINEUR H., *L'interpolation numérique* (sous presse).
- [13] PECKER J. C., *C. R. Acad. Sciences*, **226**, 1948, 1251 (cont. *IAP*, n° A 17).
- [14] PECKER J. C., *Ann. Astroph.*, **13**, 1950, 294.
- [15] PECKER J. C., *Ann. Astroph.*, **12**, 1949, 1 (cont. *IAP*, n° 33).
- [16] PECKER C., PECKER J. C., *Ann. Astroph.*, **12**, 1949 (cont. *IAP*, n° 38).
- [17] REDMAN R. O., *MN*, **103**, 1943, 173.
- [18] STRÖMGREN B., *Astronomical Journal*, **53**, 1948, 107 et communication privée.
- [19] STRÖMGREN B., Tables of Stellar Models, *Publ. Mind. Med. Kob. Obs.*, **138**, 1944.
- [20] UNSÖLD A., *Physik der Sternatmosphären*, Berlin J. Springer, 1938 ; — *Z. f. Astroph.*, **23**, 1944, 100.
- [21] WRUBEL M., *Ap. J.*, **110**, 1949, 288.

III. — Construction de modèles d'étoiles B. ¹

par Jean-Claude PECKER

(Institut d'Astrophysique)

SOMMAIRE. — Après avoir rappelé l'importance du problème des étoiles B, l'auteur expose de quelle façon on peut tabuler les coefficients d'absorption monochromatiques et moyens dont la connaissance est indispensable lorsqu'on veut construire le modèle d'une atmosphère d'étoile B. Les tables calculées par l'auteur seront publiées séparément aux contributions de l'Institut d'Astrophysique.

En utilisant la méthode d'itération de STRÖMGREN, deux modèles sont construits, correspondant à des étoiles de type B_1 et $B_{1.5}$. Les différentes caractéristiques de leur spectre continu sont tabulées. Pour cette zone spectrale, on peut montrer que l'échelle des températures de KUIPER, qu'on emploie couramment, conduit à une sous-estimation des températures. Par suite, la correction bolométrique est, elle aussi, sous-estimée (d'environ une demi-magnitude pour une étoile de type $B_{1.5}$).

INTRODUCTION : LE PROBLÈME DES ÉTOILES B.

1. — Pour appliquer les méthodes de calcul des modèles d'atmosphère, dans le cas où le coefficient d'absorption dépend de la longueur d'onde, il est particulièrement indiqué d'étudier les étoiles chaudes. En effet, le fait que l'importante discontinuité de Lyman se trouve dans la région du maximum de la courbe de PLANCK, permet de penser que malgré la diffusion « grise » par les électrons libres, c'est dans ce cas que nous aurons les écarts les plus importants par rapport au cas gris.

Ce problème est particulièrement intéressant, en raison de l'importance de la détermination de la correction bolométrique pour les étoiles B — détermination indispensable pour l'étude de la relation masse-luminosité — et de l'importance d'une bonne échelle de température dans ce domaine spectral.

De plus, nous ferons ainsi un premier pas en vue de l'étude des problèmes particuliers¹ que posent les étoiles B.

De nombreux auteurs se sont attaqués à ce problème. Citons les beaux travaux de MUSTEL [14] et de RUDKJØBING [17] qui ont appliqué des méthodes approchées dont l'avantage est déjà très grand par rapport à la solution grise. Plus récemment,

(¹) Nous désignerons par T. S. I et T. S. II les deux premiers chapitres de ce travail, déjà parus.

A. B. UNDERHILL [21] s'est intéressée au même problème par des méthodes très voisines des nôtres¹.

Enfin les étoiles B ont suscité des recherches de différents ordres :

Étude détaillée du spectre de τ Scorpii (UNSÖLD) ; mise en évidence de la séquence des étoiles de la série bleue-blanche (VORONTSOV-VELYAMINOV) ; théorie des étoiles B à raies d'émission et des étoiles de Wolf-Rayet (WEENEN) ; étoiles présentant des structures anormales, enveloppes gazeuses, jets de matière, rotation rapide... (STRUVE) ; etc....

Après avoir indiqué les principes de la tabulation des fonctions d'ionisation et d'absorption nécessaires au calcul (tabulation faite dans un appendice édité ultérieurement aux contributions de l'Institut d'Astrophysique de Paris), nous donnons les résultats de notre calcul et le comparons à ceux de M. RUDKJØBING et de A. B. UNDERHILL, ainsi qu'aux échelles de température et de correction bolométrique de KUIPER.

I. — TABLES D'IONISATION.

2. — *a)* L'intégration des équations d'équilibre des atmosphères stellaires nécessite, comme nous le verrons par la suite, la connaissance de l'absorption de la matière stellaire en fonction de deux paramètres physiques (par exemple la température T et la pression p) caractérisant l'état de cette matière, et des paramètres de composition chimique.

Or le calcul de ces coefficients d'absorption nécessite la connaissance de *l'état d'ionisation* de la matière ; une telle étude fera donc l'objet de cette première partie. Nous utiliserons les relations de Saha pour calculer la relation entre la pression p , la pression électronique p_e et la température.

Nous tabulerons également en fonction de la pression p et de la température T , la densité ρ et la masse moléculaire moyenne $\bar{\mu}$, ces deux grandeurs intervenant également dans les calculs. Nous pourrions donc ramener toutes les grandeurs physiques à deux d'entre elles, p et T .

3. — *b)* Nous supposerons, en première approximation, pour le calcul des pressions, le mélange gazeux constitué uniquement :

d'hydrogène ionisé,
d'hélium II dans l'état fondamental,
d'hélium III,
d'électrons.

Nous reviendrons par la suite, sur la validité de cette hypothèse et sur les limites dans lesquelles nous avons le droit de négliger H I, les états excités de He II et les atomes autres que H et He.

(¹) Je suis redevable à Miss A. B. UNDERHILL de la communication avant publication de certains de ces résultats, ainsi que de nombreuses remarques qui m'ont été fort utiles ; qu'elle me permette de l'en remercier vivement.

Les proportions respectives ζ_{H} d'hydrogène et ζ_{He} d'hélium (en nombre d'atomes) dans le mélange gazeux sont liées par la relation :

$$\zeta_{\text{H}} + \zeta_{\text{He}} = 1.$$

Notre étude portera sur les quatres cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \zeta_{\text{H}} = 1 & \zeta_{\text{He}} = 0 & \text{(Hydrogène pur)} \\ = 0.95 & = 0.05 & \\ = 0.85 & = 0.15 & \text{(cas de } \tau \text{ Scorpii, d'après Unsöld [22])} \\ = 0.75 & = 0.25 & \end{array}$$

Les tables obtenues seront publiées séparément.

4. — c) L'équation de Saha pour l'hélium III est la suivante :

$$(1) \quad \log \frac{N_{\text{He}^{++}}}{N_{\text{He}^{+}}} = 8.776 - 54.24 \theta - 2.5 \log \theta - \log p_e$$

où l'on a $\theta = \frac{5040}{T}$ selon la notation bien classique. Dans ces conditions, le calcul de p en fonction de p_e et T résultera de la formule

$$p = p_e \left[1 + \frac{1 + \frac{N_{\text{He}^{++}}}{N_{\text{He}^{+}}}}{1 + \frac{N_{\text{He}^{++}}}{N_{\text{He}^{+}}} + \zeta_{\text{He}} \frac{N_{\text{He}^{++}}}{N_{\text{He}^{+}}}} \right]$$

facile à établir.

Il suffira d'inverser cette table et nous obtiendrons p_e en fonction de p et de T .

La masse moléculaire $\bar{\mu}$ ⁽¹⁾ se calculera ensuite au moyen de la formule

$$\bar{\mu} = (4\zeta_{\text{He}} + \zeta_{\text{H}}) \left(1 - \frac{p_e}{p} \right)$$

où la masse des électrons a été négligée devant celle des atomes.

La densité se calculera par la formule des gaz parfaits

$$\rho = p \frac{\bar{\mu}}{RT} \quad \text{où } R = 8.314 \cdot 10^7 \text{ c.g.s}$$

5. — d) Étudions maintenant dans quelles limites de température et de pression électronique il est légitime de négliger les atomes d'H I, d'He I et les états excités de He II.

Les équations de SAHA-BOLTZMANN correspondantes sont les suivantes :

$$(2) \quad \log \frac{N_{\text{H}^{+}}}{N_{\text{H}}} = -0.48 - 13.56 \theta - 2.5 \log \theta + 9.256 - \log p_e$$

$$(3) \quad \log \frac{N_{\text{He}^{+}}}{N_{\text{He}}} = -0.12 - 25.3 \theta - 2.5 \log \theta + 9.256 - \log p_e$$

$$(4) \quad \log \frac{N_{\text{He}^{++}}}{N_{\text{He}^{++} + s=0}} = 2 \log s - 54.24 \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \theta.$$

(*) Nous attirons l'attention du lecteur sur une confusion possible entre $\bar{\mu}$ la masse moléculaire moyenne et $\mu = \cos \theta$ notation classique dans les problèmes de transfert.

Les courbes de la figure 1 limitent la région où

$$\log \frac{N_{H^+}}{N_H} > 2 \quad \log \frac{N_{He^+}}{N_{He}} > 2 \quad \log \frac{\sum N_{He^+s}}{N_{He^+s=0}} > -2.$$

Nous avons limité le calcul à $s = 6$, car les états supérieurs sont très peu peuplés en raison de leur destruction par chocs. La limitation tracée sur la figure 1 est certainement optimiste car les états $s = 4, 5, 6$ sont eux-mêmes sensiblement détruits [18].

Afin de montrer que la région envisagée est suffisamment grande, nous y avons situé trois des modèles calculés par RUDKJØBING [17].

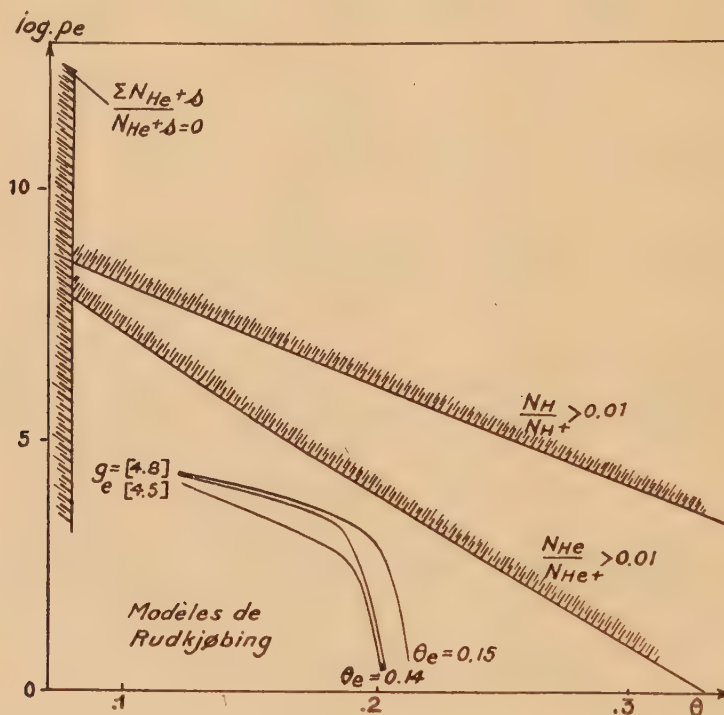


FIG. 1. — *Domaine de validité des hypothèses.*

Dans les zones hachurées,
le calcul de la pression ne peut être fait en utilisant les hypothèses simplificatrices du § 3.

e) Dans le cas $\zeta_{He} = 0$ (hydrogène pur)

$$p = 2 p_e$$

$$\mu = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{p}{2RT} = \frac{p_e \theta}{5040R}.$$

II. — COEFFICIENTS D'ABSORPTION MONOCHROMATIQUE.

6. — A) *Formules utilisées.*

Nous avons utilisé les mêmes formules d'absorption que A. UNSÖLD dans son étude de τ Scorpii [22].

a) *Hydrogène.*

On a, pour le coefficient d'absorption par gramme

$$(5) \quad \kappa_H = \frac{1}{m_H} \frac{N_{Hn} k_{Hn}}{N_{Hn} + N_{H+} + N_{Hexc}} \approx \frac{1}{m_H} \frac{N_{Hn}}{N_{H+}} k_{Hn}$$

où k_{Hn} désigne le coefficient d'absorption par atome d'hydrogène neutre, soit, fourni par la formule de KRAMERS,

$$(6) \quad \kappa_H = \frac{1}{m_H} \frac{64}{3} \frac{\pi^4}{\sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c^4 h^3 (2\pi m)^{\frac{3}{2}}} \lambda^3 \frac{p_e}{(kT)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \sum_{x_n < x} \frac{e^{x_n}}{n^3} + \frac{e^{x_5}}{2x_1} \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{h\nu_n}{kT} & \nu_n &= \frac{c}{\lambda_n} \\ x &= \frac{h\nu}{kT} & \nu &= \frac{c}{\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 912 \text{ Å} \\ \lambda_2 &= 3646 \text{ Å} \\ \lambda_3 &= 8218 \text{ Å} \\ \lambda_4 &= 14600 \text{ Å} \\ \lambda_5 &= 22800 \text{ Å} \end{aligned}$$

7. — b) *Hélium.*

$$(7) \quad \kappa_{He} = \frac{1}{m_{He}} \frac{N_{Hen} k_{Hen} + N_{He+} k_{He+}}{N_{Hen} + N_{He+} + N_{He++} + N_{Heexc}}$$

$$(8) \quad \kappa_{He} \approx \frac{1}{m_{He}} \left[\frac{N_{Hen}}{N_{He+}} k_{Hen} + k_{He+} \right] \frac{1}{1 + \frac{N_{He++}}{N_{He+}}}$$

Pour calculer cette expression, on a utilisé les valeurs des coefficients par atome :

$$(9) \quad a) \begin{cases} k_{He+} = Z^4 \frac{64}{3\sqrt{3}} \pi^4 \frac{m e^{10}}{c^4 h^3} \lambda^3 & \text{si } \lambda < 228 \text{ Å} \\ k_{He+} = 0 \text{ (1)} & \text{si } \lambda > 228 \text{ Å.} \end{cases}$$

8. — b) Dans le cas de l'hélium neutre, le calcul de k_{Hen} est plus compliqué, l'atome comportant deux électrons périphériques au lieu d'un seul.

α) Si $\lambda < 504.3 \text{ Å}$

$$(10) \quad k_{Hen} = \frac{\pi e^2}{mc} R \frac{df}{dE} = 8.06 \cdot 10^{-18} \frac{df}{dE}$$

où $\frac{df}{dE}$ a été tabulé par VINTI [23] (tableau 1).

(1) Cette approximation, utilisée par Unsöld, est en réalité incorrecte. Depuis la rédaction de ce mémoire, une correction a été apportée à nos tables de coefficients d'absorption, auxquelles le lecteur se reportera.

TABLEAU 1

$\lambda = 504.3$	$\frac{df}{dE} = 1.047$	$\lambda = 324.6$	$\frac{df}{dE} = .3890$
477.9	.9214	303.1	.3372
454.1	.8159	284.2	.2950
432.5	.7299	267.5	.2607
412.9	.6565	252.6	.2321
395.0	.5946	239.4	.2085
378.0	.5415	227.4	.1875
363.5	.4953	216.6	.1698
349.6	.4554	211.6	.1619
336.6	.4202	206.8	.1547

Après avoir commencé ce calcul utilisant le travail de VINTI, nous avons eu connaissance d'une table publiée par S. S. HUANG [9] ; on voit sur la figure 2 qu'elle s'écarte très peu de la table de VINTI.

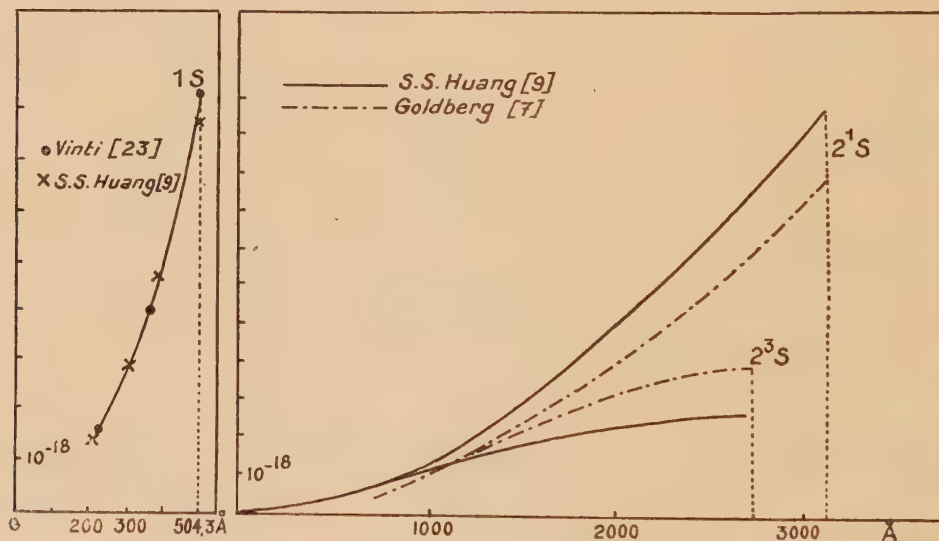


FIG. 2. — Coefficient d'absorption par atome d'hélium.

Les courbes concernant les états 1S et 2S selon VINTI, GOLDBERG et HUANG.

β) Si

$$\lambda > 504,3$$

on a

$$k_{He_n} = k_\alpha + k_\beta$$

avec

$$1. \quad k_\beta = k_{H_n}$$

continu des états $n \geq 3$: un électron est très excité, l'autre ne l'est pas : analogie évidente avec l'atome d'hydrogène.

$$2. \quad k_{\alpha} = a_1 \frac{n_1}{n_0} + a_2 \frac{n_2}{n_0} + a_3 \frac{n_3}{n_0} + a_4 \frac{n_4}{n_0}$$

continu des séries triplets et singulets $2S - nP$ et $2P - nD$ (GOLDBERG)

$$\log \frac{n_i}{n_0} = \log \frac{g_i}{g_0} - (\chi_i - \chi_0) \theta.$$

Pour les états

0 (1S), $g = 1$, $\chi_i - \chi_0 = 0$	
1 (2^3S), $g = 3$	= 19.77 volts
2 (2^1S), $g = 1$	= 20.55
3 (2^3P_0), $g = 9$	= 20.92
4 (2^3P_0), $g = 3$	= 21.17.

On a de plus

$$\begin{cases} a_i = \left(\frac{\lambda \text{Å}}{912} \right)^{-\beta_i} + 10^{-\gamma_i} & \text{si } \lambda < \lambda_i \\ a_i = 0 & \text{si } \lambda > \lambda_i. \end{cases}$$

Pour les états

1	$\lambda_i = 2600 \text{ Å}$	$\gamma_i = + 18.15$	$\beta_i = 1.8$
2	3130	18.02	1.7
3	3400	18.50 — 0.02	2.6
4	3675	19.00 — 0.02	3.2

(Le nombre 0.02 ajouté à $-\gamma_i$ pour $i = 3$ et 4 , est destiné à tenir compte des transitions négligées $2P - mS$).

(Selon L. GOLDBERG [8] et A. UNSÖLD [22].)

Nous noterons que depuis que nos calculs ont été commencés, des valeurs plus précises de k_{α} ont été publiées par S. S. HUANG [2]. Nous ne pensons pas que les calculs en soient considérablement modifiés ; la figure 2 montre en tout cas dans quelle mesure ils le seraient.

9. — c) Diffusion par les électrons libres.

On a

$$\sigma = \sigma_{el} \frac{N_e}{\rho} \quad \text{par gramme}$$

$$\begin{cases} N_e = \frac{p_e}{kT} & \text{(nombre d'électrons par cm}^3\text{)} \\ \rho = \frac{p_{\mu}}{RT} & \text{(densité)} \end{cases}$$

$$\sigma_{el} = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{e^2}{mc^2} \right]^2 \quad \text{par électron}$$

d'où

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{e^2}{mc^2} \right]^2 \frac{p_e}{p_{\mu}} \frac{R}{k} \quad \text{par gramme.}$$

10. — d) Coefficient d'absorption par gramme du mélange.

On a

$$(11) \quad \kappa_\nu + \sigma = \left(\frac{m_H \zeta_H \kappa_H + m_{He} \zeta_{He} \kappa_{He}}{m_H + m_{He}} \right) \left[1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right] + \sigma$$

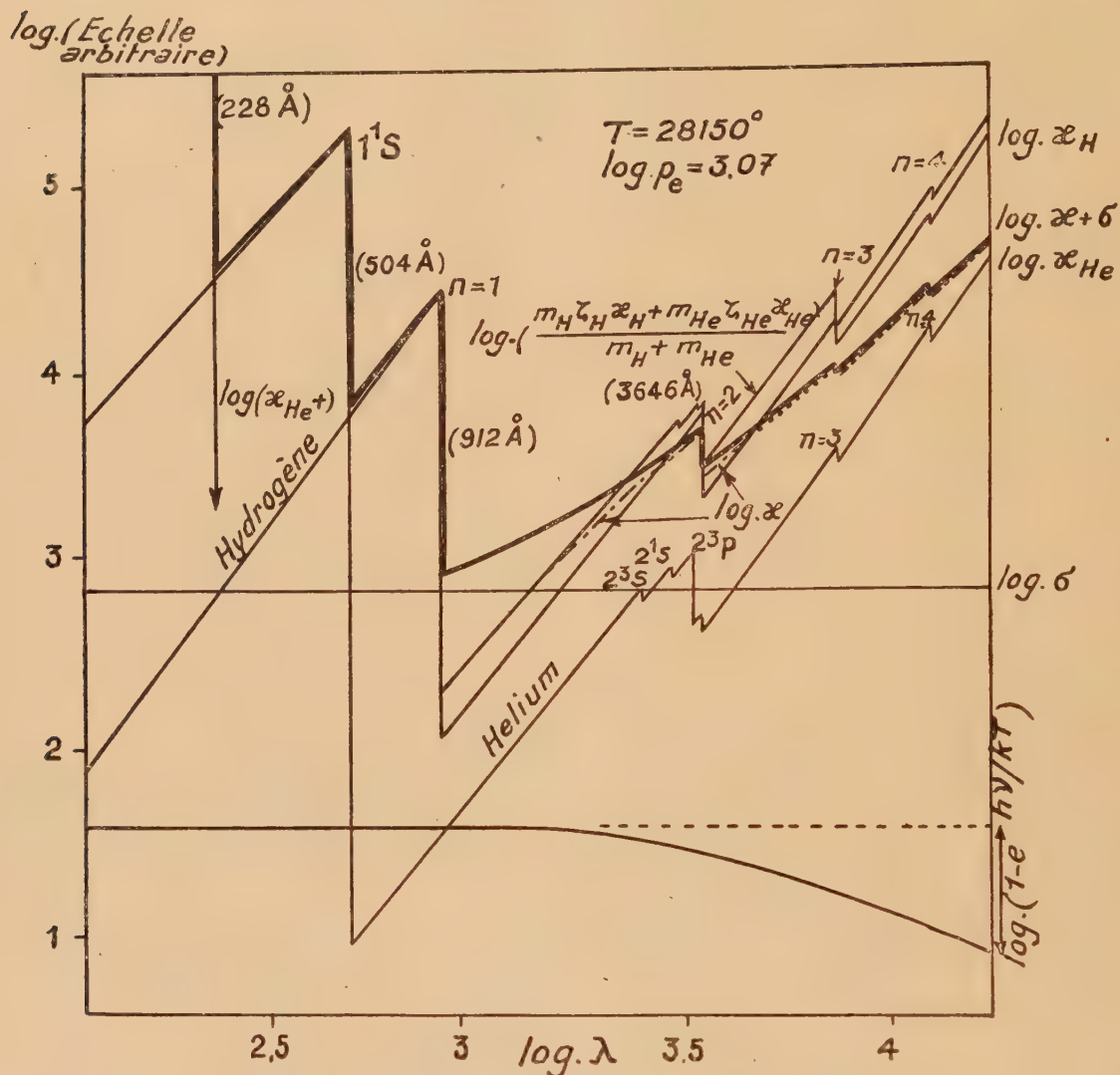


FIG. 3. — Le coefficient d'absorption de la matière stellaire.

Ce diagramme est tracé d'après l'article d'UNSÖLD [22], après de légères modifications.

où $1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}$, facteur d'émission induite, ne s'applique pas au coefficient de diffusion comme RUDKJØBING [17] l'a fait remarquer, au contraire de ce qu'a fait UNSÖLD [22].

Sur la figure 3, nous avons représenté les différents coefficients d'absorption (figure reproduite avec légères modifications de l'article d'UNSÖLD sur τ Scorpii).

B) *Tabulations.*

11. — a) Dans ces conditions, et à l'aide des formules que nous venons de rappeler, il a été possible de tabuler $\kappa_v + \sigma$ dans le domaine défini plus haut (fig. 1).

Ces tables ont été faites pour :

— $\theta = \frac{5\,040}{T}$ variant entre 0.1 et 0.3, de 0,02 en 0,02.

— $\log p_e$ de 0.5 en 0,5 entre les valeurs limites indiquées sur la figure 1.

— Les valeurs suivantes de la longueur d'onde

$\lambda =$	228 +	504,3 +	912 +	3646 +
	366,15	708,15	(1595,5)	6823
	504,3 —	912 —	2279	10000
			(2965,5)	
			3646 —	(en Angströms)

Les valeurs correspondant aux deux longueurs d'onde 1595,5 et 2965,5 — qui ne faisaient pas partie de notre programme initial de tabulation — ont été calculées par interpolations et incorporées aux tables, afin d'obtenir une précision suffisante (mieux que 1 %) sur la fonction $\int B_\lambda d\lambda = \sigma T^4$.

Enfin, les mélanges suivants ont été envisagés :

— $\zeta_{He} = 0$	Hydrogène pur	$\zeta_H = 1$
= .05		= .95
= .15		= .85
= .25		= .75

La fonction $\frac{\sigma_v}{\kappa_v + \sigma}$ a été également tabulée.

12. — b) Les valeurs des constantes utilisées sont les suivantes [3].

TABLEAU II

h	$= 6.624 \cdot 10^{-27}$	constante de PLANCK.
k	$= 1.3805 \cdot 10^{-16}$	constante de BOLTZMANN.
m_H	$= 1.67339 \cdot 10^{-24}$	masse de l'atome d'hydrogène.
m_{He}	$= m_H \frac{4.00389}{1.00813}$	masse de l'atome d'hélium.
m	$= 9.1066 \cdot 10^{-28}$	masse de l'électron.
e	$= 4.8025 \cdot 10^{-10}$	charge de l'électron.
c	$= 2.99776 \cdot 10^{10}$	vitesse de la lumière.

C) *L'absorption continue des métaux.*

13. — Nous avons négligé, à la suite d'UNSÖLD et de RUDKJØBING, le coefficient d'absorption dû aux éléments autres que H et He.

Sur la figure 4, tracée en utilisant les données sur l'abondance de H et He dans les étoiles [16], on peut se rendre compte que l'abondance des métaux est de l'ordre de 0,1 (en masse).

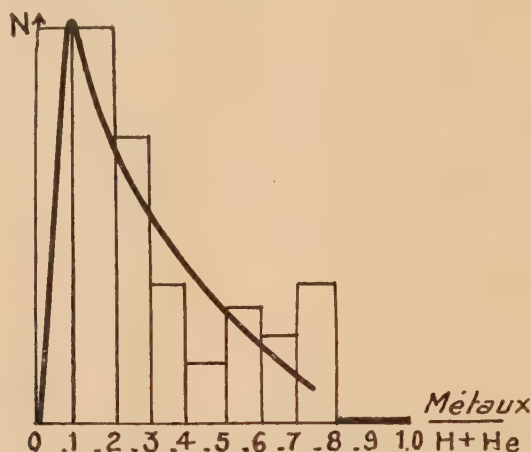


FIG. 4. — Abondance des métaux dans les étoiles.

Statistique portant sur 51 étoiles

(les abondances sont exprimées en masse de métal par rapport à masse d'hydrogène et d'hélium) [16].

De plus, WEENEN [25] a calculé ce coefficient d'absorption dans un cas voisin de celui que nous étudions. Sa table — que nous reproduisons ci-dessous — montre qu'il est légitime de négliger l'absorption continue des métaux.

TABLEAU III

T	HYDROGÈNE		MÉTAUX	
	Moyenne de Rosseland	Lyman	λ 1 000	λ 6 000
25.000°	9.00	11.21	2.39	2.44
20.000°	9.35	12.07	3.09	2.64
15.000°	9.91	13.36	4.15	2.93
10.000°	10.89	15.93	6.39	3.42

(La table donne le logarithme du coefficient d'absorption par gramme.)

III. — LES COEFFICIENTS MOYENS D'ABSORPTION.

14. — a) Nous avons calculé les coefficients moyens d'absorption du mélange, dans les différents cas étudiés au moyen des deux formules :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\kappa}_R = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \\ \bar{\kappa}_{Pl} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu}{\int_0^\infty B_\nu d\nu} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{moyenne de Rosseland} \\ \text{Moyenne d'Eddington} \\ \text{ou « moyenne » Planck} \end{array}$$

Ces calculs nécessitent la connaissance de la fonction de PLANCK. Nous avons utilisé une formule d'intégration approchée du type NEWTON-COTES à 3 ou 5 points, entre les différentes discontinuités du coefficient d'absorption. De plus, pour $\lambda < 228 \text{ \AA}$ et $\lambda > 10\,000 \text{ \AA}$, nous avons utilisé les formules approchées classiques de la fonction de PLANCK :

$$(13) \quad \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \approx e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad \text{si } \lambda < 228 \text{ \AA}$$

$$(14) \quad \approx \frac{kT}{h\nu} \quad \lambda > 10000 \text{ \AA}.$$

Pour ces deux intervalles, nous avons utilisé des formules d'intégrations qui seraient *exactes* pour la fonction de PLANCK.

La formule d'intégration

$$(15) \quad \int_0^\infty f(\lambda) d\lambda = \sum_i P(\lambda_i) f(\lambda_i)$$

utilise les poids $P(\lambda_i)$ rassemblés dans le tableau 4. Pour $\lambda = 228 \text{ \AA}$ ces poids sont une fonction de la température. La validité de cette formule a été contrôlée par son application à la fonction B_λ . On a en effet :

$$(16) \quad B(T) = \int B_\lambda(T) d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4.$$

Le calcul de $B(T)$ a pu être fait avec une précision meilleure que 1 %, ce que nous avons considéré comme suffisant.

TABLEAU IV

$\lambda = 228 \text{ \AA}$	$\theta = 0.10$	$P_{vi} = 115.4 \cdot 10^{-8}$	$\lambda = 366.15 \text{ \AA}$	$P_{vi} = 184.2 \cdot 10^{-8}$
	0.12	110.7 10^{-8}	504.3 —	46.05 10^{-8}
	0.14	107.6 10^{-8}		
	0.16	105.4 10^{-8}	504.3 +	67.95 10^{-8}
	0.18	103.7 10^{-8}	708.15	271.3 10^{-8}
	0.20	102.4 10^{-8}	912 —	67.95 10^{-8}
	0.22	101.4 10^{-8}		
	0.24	100.5 10^{-8}	912 +	212.64 10^{-8}
	0.26	99.7 10^{-8}	1 595.5	972.09 10^{-8}
	0.28	99.2 10^{-8}	2 279	364.53 10^{-8}
	0.30	98.7 10^{-8}	2 962.5	972.09 10^{-8}
			3 646 —	212.64 10^{-8}
			—	
			3 646 +	1 059 10^{-8}
			6 823	4 236 10^{-8}
			10 000	1 392.3 10^{-8}

15. — b) Les tables de l'Appendice publié ultérieurement nous donnent les valeurs de la *fonction de Planck* aux points considérés et celles des *poids* de l'intégration numérique permettant le calcul de $\bar{\kappa}_R$ et $\bar{\kappa}_{Pl}$ par les formules suivantes :

$$(17) \quad \begin{cases} \bar{\kappa}_R = \sum_i \frac{1}{\kappa_{vi}} \mathcal{P}_{Ri}(\theta) \\ \bar{\kappa}_{Pl} = \sum_i \kappa_{vi} \mathcal{P}_{Pli}(\theta). \end{cases}$$

Nous avons tabulé la fonction

$$(18) \quad B_\lambda(T) = \frac{2h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}.$$

Si l'on veut calculer $B_\nu(T)$, on se sert de la relation :

$$(19) \quad B_\lambda(T) = \frac{c}{\lambda^2} B_\nu(T).$$

Nous rappelons que :

$$(20) \quad \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4,$$

IV. — CONSTRUCTION D'UN MODÈLE D'ÉTOILE B.

A) *Méthode suivie.*

16. — Nous avons rapidement rappelé dans le chapitre I la méthode de B. STRÖMGREN, méthode que nous avons suivie dans ses grandes lignes.

Nous allons maintenant décrire dans leurs détails les calculs effectués.

a) *Point de départ de l'itération.*

En raison du rôle fondamental joué par l'hydrogène dans les étoiles, nous avons choisi une étoile d'*hydrogène pur*. Par la suite, nous pourrions étudier des cas plus complexes en procédant par perturbations à partir d'une étoile d'hydrogène pur.

Nous sommes partis des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_e &= 0.2 & (T_e &= 25200^\circ) \\ g &= 3 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

correspondant en gros à une étoile naine de type probable Bo (selon l'échelle de KUIPER [12]).

17. — b) *Le modèle gris initial.*

De tous les modèles gris qu'il est possible de calculer pour décrire l'atmosphère non-grise d'une étoile, les meilleurs sont sans doute ceux que fournissent la moyenne PLANCK, ou la moyenne de CHANDRASEKHAR [5], qui en est très voisine [13]. MICHARD a pu en effet montrer [13] qu'un modèle gris calculé en utilisant la moyenne-PLANCK satisfait mieux que tout autre à la condition de constance du flux « non-gris » (c'est-à-dire du flux calculé en utilisant le modèle gris, et le coefficient d'absorption réel, qui dépend de la longueur d'onde).

Dans ses calculs, A. B UNDERHILL [21] a utilisé la moyenne de CHANDRASEKHAR.

Cependant, dans ce travail, nous avons utilisé la moyenne de ROSSELAND ; car nous savons que la moyenne de CHANDRASEKHAR ou la moyenne-PLANCK conduisent à des modèles dont le flux non-gris n'est pas le même que le flux gris, même aux grandes profondeurs : au contraire la moyenne de ROSSELAND — qui est valable en toute rigueur dans les couches profondes — permet d'obtenir un modèle gris dont le flux non-gris aux grandes profondeurs est bien le même que le flux gris. Nous espérons donc que le choix de la moyenne de ROSSELAND nous permettrait (et serait le seul à nous permettre) de converger vers une solution correspondant à une étoile de même température effective que le modèle initial, puisque dans la méthode de STRÖMGREN (voir TS I, § 19) les itérations successives ne modifient pas le modèle dans les couches profondes. Au contraire, le choix de la moyenne-PLANCK, qui nous aurait permis une convergence plus rapide, nous aurait conduit au cours des itérations, à un changement de la température effective. On verra que, si notre calcul a donné de bons résultats, nous avons été pourtant déçus par la moyenne de ROSSELAND, en raison de la trop grande lenteur de la convergence.

Le calcul a été mené de la façon suivante :

Nous partons des deux équations :

$$(21) \quad T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 [\bar{\tau} + q(\bar{\tau})]$$

$$(22) \quad d\bar{\tau} = \frac{\bar{\kappa} + \sigma}{g} d(p + p_r)$$

$$(23) \quad \text{avec } p_r = \frac{1}{3} a T^4.$$

On calcule $(\kappa + \sigma)_1$ (T_e) puis $\tau_1(p)$ puis $T_1(p)$ d'où une nouvelle loi $(\kappa + \sigma)_2$ (T_1) etc....

jusqu'à une convergence suffisante.

La convergence étant lente pour les grandes profondeurs, nous avons utilisé l'approximation :

$$T^4 \cong \frac{3}{4} T_e^4 [\bar{\tau} + q(\infty)]$$

d'où

$$(24) \quad d\bar{\tau} = \frac{3}{4} \frac{dT^4}{T_e^4}$$

et

$$(25) \quad \bar{\kappa} + \sigma \cong \bar{\kappa}^* p_e.$$

Par suite, en introduisant la gravité effective

$$(26) \quad g_e = g - \frac{dp_r}{\rho dx} \cong g + \frac{1}{3} a \bar{\kappa}^* p_e T_e^4$$

sensiblement constante aux grandes profondeurs, on peut écrire :

$$(27) \quad dp_e^2 = \frac{3}{4} \frac{dT^4}{T_e^4} \frac{g_e}{\kappa^*(T)}$$

puisque pour de l'hydrogène pur, on a : $p = 2p_e$.
En intégrant l'expression (27) on trouve :

$$(28) \quad p_e^2 = \frac{3}{4} \frac{g_e}{T_e^4} \int_{T_0}^T \frac{1}{\kappa^*(T)} dT^4.$$

18. — c) *Itérations successives.*

Disposant maintenant d'un modèle approché d'atmosphère, nous nous en sommes servis pour calculer des modèles successifs satisfaisant de mieux en mieux la condition de constance du flux. La marche suivie est la suivante :

α) A un stade déterminé de l'itération, nous connaissons $T_i(p_e)$ donc $\kappa_{\lambda i}(p_e)$. (Nous utilisons de plus, dans le cas de l'hydrogène pur, la propriété :

$$\kappa_{\lambda} = \kappa_{\lambda}^* p_e$$

où κ_{λ}^* ne dépend que de la température.)

On en déduit la pression de radiation $p_r(p_e)$ en portant les valeurs de $S_{i-1}(p_e)$ données par les courbes tracées lors de l'itération précédente, dans les formules d'intégration numérique dont les tables ont été données au chapitre I.

Nous calculons ensuite pour chacune des longueurs d'onde choisies :

$$(29) \quad \tau_{\lambda i}(p_e) = \int \frac{\kappa_{\lambda i}(p_e)}{g} d(p + p_r)$$

au moyen de l'intégrateur graphique de l'Institut d'Astrophysique et en utilisant pour chaque longueur d'onde des courbes tracées à une aussi grande échelle que possible, divisées en trois tronçons ($0 \leq \log p_e \leq 2.25$; $2.25 \leq \log p_e \leq 3$; $3 \leq \log p_e \leq 4.5$).

Nous pouvons alors calculer $B_{\lambda i}(\tau_{\lambda i})$ car nous connaissons $B_{\lambda i}(T)$.

Nous calculons ensuite $\frac{\sigma}{\kappa_{\lambda} + \sigma}(p_e)$ au moyen des tables, puis les fonctions-sources :

$$(30) \quad S_{\lambda i}(p_e) = \frac{\sigma}{\kappa_{\lambda} + \sigma} \bar{I}_{\lambda, i-1}(p_e) + \frac{\kappa_{\lambda}}{\kappa_{\lambda} + \sigma} B_{\lambda, i}(p_e)$$

(au premier stade, on a $\bar{I}_{\lambda 0} = B_{\lambda i}$).

Pour chaque longueur d'onde, nous traçons les courbes $S_{\lambda i}(\tau_{\lambda i})$ sur papier millimétré (21 × 27 cm) en les séparant en 5 ou 6 tronçons afin de disposer d'une échelle suffisamment bonne.

Au moyen des tables de B. STRÖMGREN (voir TS I), transformées en courbes permettant des interpolations faciles, nous calculons les $\tau_1 \dots h_1 \dots$, points de division, et poids de l'intégration numérique nécessaire au calcul de $I_{\lambda i}$; puis au

moyen des courbes que nous venons de tracer : $S_{\lambda_i}(\tau_1)$, $S_{\lambda_i}(\tau_2)$ Enfin, il est possible de calculer :

$$(31) \quad \bar{I}_{\lambda_i} = h_1 S_{\lambda_i}(\tau_1) + h_2 S_{\lambda_i}(\tau_2) + \dots$$

On en déduit $I_{\lambda_i} - B_{\lambda_i}$, et par la relation itérative de STRÖMGREN (TS I), nous obtenons :

$$T_{i+1}(p_e)$$

β) Si les itérations successives fournissent, à partir d'un certain moment, des modèles successifs identiques (convergence), on a :

$$T_{i+1} = T_i \quad \text{et} \quad \bar{I}_{\lambda_{i+1}} = \bar{I}_{\lambda_i}$$

ce qui justifie notre méthode d'itération.

Nous avons, à titre d'indication, minuté les différentes opérations de ce calcul. Totalisées, elles représentent pour 12 valeurs de p_e , 14 longueurs d'onde et par itération, un travail d'environ 60 heures. Les différentes interpolations graphiques, sont, à notre avis, aussi précises que les interpolations numériques (pourvu que l'échelle soit suffisante) et certainement plus rapides.

γ) La pression de radiation a été prise égale à $\frac{1}{3}aT^4$ dans les premières itérations, puis calculée de façon plus correcte (voir TS I) dans les itérations suivantes.

δ) De plus, aux deux derniers stades, on a calculé le flux $\mathcal{P}_{\lambda_i}$ par la méthode de STRÖMGREN, puis

$$\bar{\mathcal{P}}_i = \int \mathcal{P}_{\lambda_i} d\lambda$$

au moyen de la formule d'intégration approchée utilisée ci-dessus.

19. — d) *Comparaison avec la méthode de A. B. Underhill.*

α) Le modèle d'A. B. UNDERHILL est calculé à partir des données suivantes : $\zeta_{\text{He}} = 0.15$; $T_0 = 25\,200^\circ$, $\log g = 4.2$. Ce modèle tient compte de l'existence d'une zone convective.

β) Calcul de la fonction-source.

Quand B_{ν_i} est calculé, l'application à cette fonction de l'opérateur Λ (voir chapitre I) permet d'obtenir $I_{\nu_{i+1}}$ puis $S_{\nu_{i+1}}$. L'application de cet opérateur à $S_{\nu_{i+1}}$, S_{ν_i} ... un certain nombre de fois permet de converger vers la valeur correcte de $S_{\nu_{i+2}}$ et alors seulement de passer à l'itération suivante.

A. B. UNDERHILL pouvait ainsi éviter d'utiliser dans l'itération les deux stades successifs précédant le stade en cours d'étude.

Un tel calcul est justifié par le fait que A. B. UNDERHILL n'a fait qu'une itération. Notre méthode est plus légitime dans notre cas, puisque nous avons fait six itérations !

β) Calcul de la pression de radiation.

En utilisant les propriétés du coefficient moyen d'absorption de CHANDRA-SEKHAR, A. B. UNDERHILL introduit pour la fonction $\frac{dp_r}{dx}$ l'expression

$$(32) \quad \frac{dp_r}{dx} = -\frac{\pi}{c} \int_0^\infty (\kappa_\nu + \sigma) \rho F_\nu d\nu \simeq -\frac{\pi}{c} [\bar{\kappa}_{CH} + \sigma] \rho \int_0^\infty F_\nu d\nu$$

soit

$$(33) \quad \frac{dp_r}{dx} \simeq -(\bar{\kappa}_{CH} + \sigma) \rho \frac{\sigma T_e^4}{c}.$$

Cette formule (33) peut s'écrire

$$(34) \quad \frac{dp_r}{d\bar{\tau}} = \frac{\sigma}{c} T_e^4$$

et par suite

$$p_r = \frac{\sigma}{c} T_e^4 \bar{\tau} + \text{constante.}$$

Or

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 (\bar{\tau} + q).$$

La constante sera calculée naturellement de façon à permettre à p_e d'être égal à sa valeur exacte aux grandes profondeurs (dans la méthode de A. B. UNDERHILL, il n'est d'ailleurs pas utile de calculer cette constante).

On a donc

$$(35) \quad p_r = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{1}{4} a T_e^4 [q_\infty - q(\bar{\tau})]$$

(rappelons que $\frac{ac}{4\pi} = \frac{\sigma}{\pi}$).

Nous voyons (fig. 5), que cette formule est très voisine de la valeur $\frac{1}{3} a T^4$. Elle entraîne des erreurs comparables à celles dues à cette approximation.

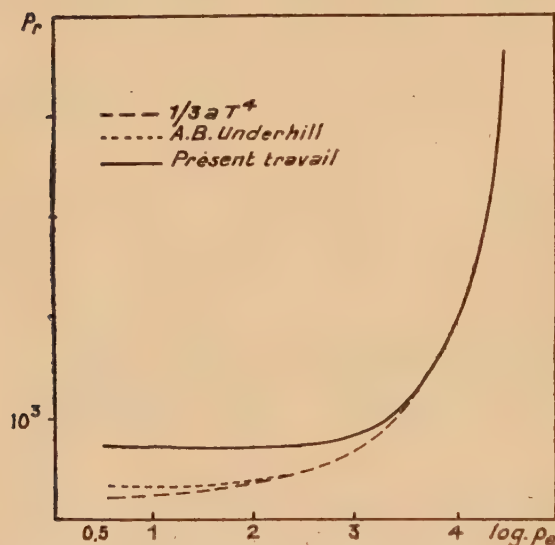


FIG. 5. — Pression de radiation.

Le calcul de p_r est fait avec diverses formules d'approximation, dans le cas d'un des modèles calculés dans ce chapitre.

Nous espérons « converger » assez vite. En réalité, après six itérations, nous améliorions chaque fois notre modèle, mais toujours de façon insuffisante. Nous avons dû nous arrêter avant d'avoir convergé vers un modèle admettant en surface le même flux que le flux à l'infini (correspondant à la température effective

B) Les résultats.

20. — a) Marche de l'itération.

$\theta_e = 0.2$). Alors que nous arrivons à une constance satisfaisante du flux dans les couches superficielles, nous constatons un effondrement de sa valeur vers les très grandes profondeurs.

La raison de ce phénomène est très simple, il constitue en fait une imperfection obligatoire de la méthode itérative de B. STRÖMGREN.

Lorsque nous calculons $\bar{I}_v$ à la surface, les valeurs calculées dépendent *seulement* de ce qui se passe au voisinage de la surface (plus précisément pour $\tau < 2.5$). Au contraire, les valeurs $\bar{I}_v$ aux grandes profondeurs dépendent *seulement* de ce qui se passe en des régions profondes : En effet, en remplaçant l'intégration sur τ de zéro à l'infini par une somme de 4 termes faisant intervenir seulement la fonction-source en quatre points, la méthode a supprimé la liaison, — en réalité assez faible, mais non nulle —, qui existe entre les faibles et les grandes profondeurs.

Ceci explique le fait qu'au cours de l'itération le flux, au voisinage de la surface, devient vite constant mais que sa valeur est très lente à rejoindre la valeur du flux valable aux grandes profondeurs.

Le fait que les valeurs du flux aux grandes profondeurs soient mauvaises est dû également au procédé de calcul. Nous devons faire la différence de quantités presque égales, d'autant plus voisines l'une de l'autre que nous nous enfonçons profondément dans l'atmosphère. Si les calculs sont effectués avec un nombre déterminé de chiffres significatifs (3 dans nos calculs), on arrive vite à une profondeur où la différence est de l'ordre de grandeur d'une unité de la dernière décimale ; le calcul du flux n'a plus alors aucune signification.

De même, le calcul de $\bar{I}_\lambda - B_\lambda$ sera imprécis aux grandes profondeurs ; mais ce sera moins grave, car cette quantité tend réellement vers zéro quand la profondeur augmente.

La figure 6 montre « la marche de l'itération ». Le tableau 5 donne les modèles

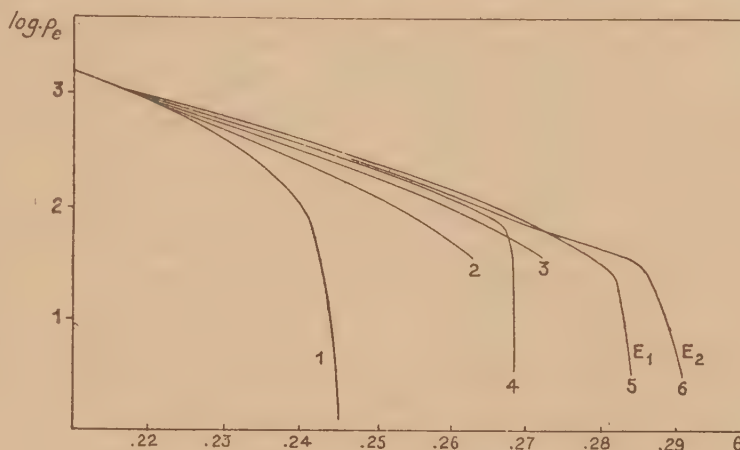


FIG. 6. — Marche de l'itération.

Modèle 1 Cas gris ROSSELAND ($\theta_e = 0.2$).

2 Pas de diffusion : $p_r = 0$.

3 $p_r = \frac{1}{3} aT^4$; $S_3 = B_3 + \lambda[1 - B]_2$. ⁽¹⁾

4 $\left\{ \begin{array}{l} p_r \text{ calculé} \\ \text{avec formules} \\ \text{du chapitre I.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} S_4 = B_4 + \lambda[1 - B]_2 \\ S_5 = B_5(1 - \lambda) + \lambda \bar{I}_4 \\ S_6 = B_6(1 - \lambda) + \lambda \bar{I}_5. \end{array} \right.$

(1) La lettre λ désigne dans cette légende, l'expression $\frac{\sigma}{\kappa + \sigma}$.

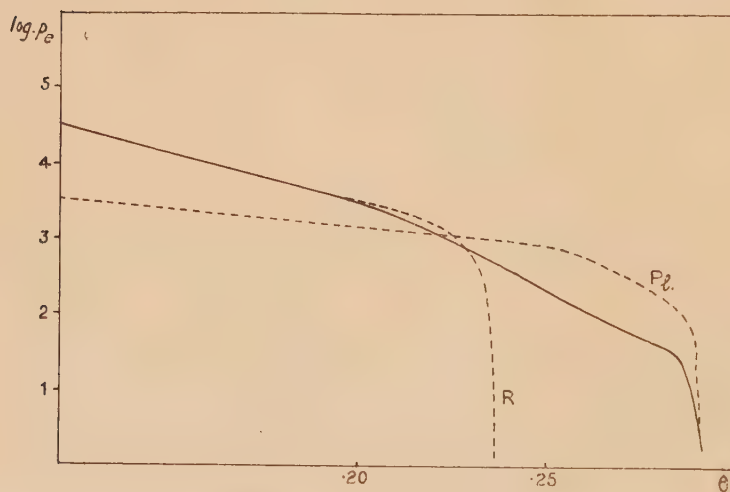
obtenus dans les deux dernières itérations et la marche correspondante du flux (modèles E_1 et E_2). Le dernier modèle E_2 n'est pas sensiblement meilleur que E_1 au point de vue de la constance du flux dans les couches superficielles.

TABLEAU V *

Modèles (flux en unités c. g. s.)						Température de surface		
$\log p_e$	$\theta(E_1)$	F	$\theta(E_2)$	F	$\theta(E_2)$ complété		E_1	E_2
0.5	0.284	$1.016 \cdot 10^{12}$	0.291	$8.731 \cdot 10^{11}$		T_0	17 700°	17 300°
1	0.283	1.016	0.289	8.731		$\frac{\theta_e}{\theta_0}$	0.647	0.657
1.5	0.280	1.016	0.285	8.731				
1.75	0.274	1.016	0.273	8.731				
2.	0.265	1.014	0.263	8.755				
2.25	0.258	1.007	0.255	8.731				
2.5	0.246	1.004	0.244	8.683				
2.75	0.237	$9.995 \cdot 10^{11}$	0.235	8.564				
3	0.225	9.924	0.224	8.396	0.224			
3.5	(0.197)		(0.196)	(7.371)	0.200			
4	(0.170)	(5.463)	(0.170)	(5.033)	0.158			
4.5	(0.136)		(0.136)	—	0.120			

21. — b) Obtention du modèle final.

Il reste à obtenir un modèle où le flux soit constant de la surface jusqu'aux

FIG. 7. — Le modèle E_2 .

constance, ni la valeur du flux à sa surface.

Nous avons complété ce calcul par un modèle gris-PLANCK de même température superficielle que notre modèle E_2 (fig. 7). La position respective des 2 modèles gris et du modèle réel, s'explique par le fait que la moyenne-

* Les flux donnés dans les colonnes 3 et 5 du tableau V doivent être multipliés par 10 (lire : $1.016 \cdot 10^{13}$...).

PLANCK donne le poids maximum aux régions spectrales les plus opaques, tandis que la moyenne de ROSSELAND donne le poids minimum à ces régions spectrales : on conçoit que le modèle réel soit intermédiaire entre ces deux modèles.

22. — c) *Fonctions-sources monochromatiques.*

L'allure de la variation de ces fonctions-sources dont dépend un grand nombre de calculs (raies d'absorption, assombrissement...) nous semble intéressante sous bien des rapports.

TABLEAU VI *

Fonctions sources monochromatiques (étoile E₂) (dans le domaine visible)

$\log p_e$	τ_{2962}	S_{2962}	τ_{3646-}	S_{3646-}	τ_{3646+}	S_{3646+}
0.5	0	3.60 (14)	0	1.96 (14)	0	2.30 (14)
1	.00006	3.60	.00008	2.04	.000016	2.28
1.5	.0005	3.65	.0009	2.12	.00014	2.28
1.75	.0015	3.82	.0027	2.33	.00043	2.36
2	.0040	4.03	.0071	2.60	.0012	2.50
2.25	.011	4.36	.019	2.81	.0033	2.67
2.5	.031	4.87	.052	3.15	.0098	2.96
2.75	.080	5.56	.141	3.48	.028	3.27
3	.22	6.56	.36	3.94	.078	3.72
3.5	1.12	9.25	2.20	5.10	.56	5.03
4	7.70	1.25 (15)	13.5	6.65	3.84	6.65
4.5	52.3	1.92	89.2	9.71	30.4	9.71

$\log p_e$	τ_{6823}	S_{6823}	τ_{10000}	S_{10000}
0.5	0	2.70 (13)	0	6.94 (12)
1	.00006	2.86	.0001	7.56
1.5	.0007	3.12	.0009	8.54
1.75	.0021	3.48	.0028	9.16
2	.0057	3.74	.0078	1.00 (13)
2.25	.016	3.98	.022	1.08
2.5	.045	4.36	.064	1.15
2.75	.135	4.72	.192	1.24
3	.372	5.13	.54	1.34
3.5	2.4	6.32	3.6	1.61
4	17.3	7.75	27.6	1.93
4.5	134.4	1.05 (14)	221.6	2.53

(Le nombre entre parenthèses est la puissance de 10 par laquelle il faut multiplier le nombre correspondant de la table.)

(*) Les fonctions S des colonnes 3, 5, 7, 10, 12, doivent être multipliées par 100 (*Lire* : 3.60 (16)...).

Elle est nettement différente dans les régions de grande opacité ($\bar{I}_\lambda - B_\lambda < 0$) ou de grande transparence ($\bar{I}_\lambda - B_\lambda > 0$) comme on le voit sur la figure 8, relative à ce qui se passe pour des longueurs d'onde intermédiaires entre celle de la discontinuité de Lyman et celle de la discontinuité de Balmer.

De plus, leur allure compliquée (inflexions, méplats) laisse des doutes sur la possibilité de leur représentation

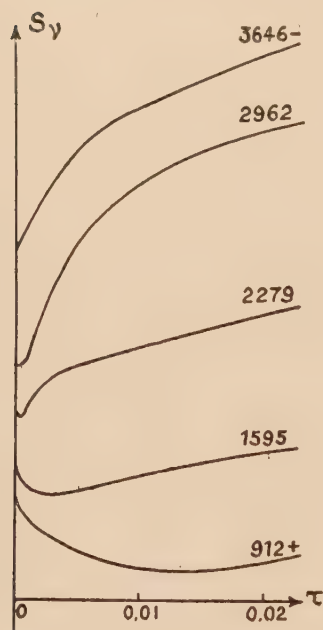


FIG. 8. — Les fonctions sources monochromatiques entre les discontinuités de LYMAN et de BALMER. (Étoile. E_2) (échelles des ordonnées : arbitraires).

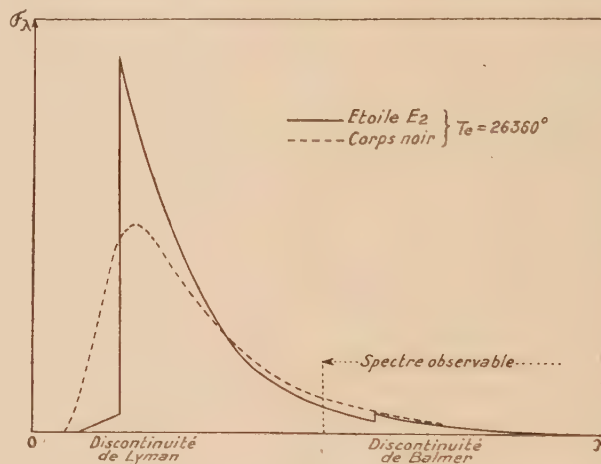


FIG. 9. — Spectre continu d'une étoile $B_{1.5}$ (E_2).

par une formule analytique utilisant un petit nombre de fonctions simples ⁽¹⁾.

Nous donnons sur la figure 8 les courbes relatives à $\lambda = 912 +$, $1\,595$; $2\,279$; $2\,962$; $3\,646 -$, et dans le tableau 6 les valeurs relatives à $\lambda = 2\,962$, $3\,646 -$, $3\,646 +$, $6\,823$, $10\,000$ (intéressantes parce qu'elles correspondent au domaine visible). Dans les deux cas, ces données sont relatives au modèle E_2 .

23. — d) Spectre continu.

Le tableau 7 donne les valeurs de $\bar{\pi}_\lambda$ pour les longueurs d'onde considérées, dans le cas des modèles E_1 et E_2 . On voit sur la figure 9, dans le cas de l'étoile E_2 , l'allure générale de ce spectre continu.

Il s'en déduit aussitôt les grandeurs suivantes, rassemblées sur le tableau 7 pour nos deux modèles.

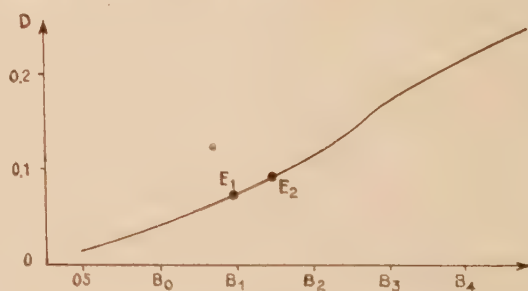


FIG. 10. — Détermination du Type Spectral. La courbe est tracée selon [1].

⁽¹⁾ En fait, il semble bien que le minimum calculé dans certains cas soit dû à une itération insuffisante et qu'il disparaîtrait à la convergence (communication personnelle de A. B. UNDERHILL).

TABLEAU VII
Le spectre continu des modèles E_1 et E_2

λ	Flux (en unités c. g. s. par cm de longueur d'onde)		Températures de brillance	
	E_1	E_2		
228	1.183 (14)	1.972 (14)		
366.15	6.735 (14)	8.080 (14)		
504.3	4.529 (15)	5.412 (15)		
504.3	4.529 (15)	5.412 (15)		
708	2.196 (16)	2.509 (16)		
912	4.960 (17)	5.385 (17)	19 090°	19 310°
912	1.436 (18)	9.592 (17)	32 100°	29 820°
1 595	4.925 (17)	4.460 (17)	—	—
2 279	1.746 (17)	1.721 (17)	25 460°	25 320°
2 962	7.627 (16)	7.758 (16)	23 300°	23 600°
3 646	4.038 (16)	4.128 (16)	22 850°	23 140°
3 646	4.882 (16)	5.049 (16)	25 400°	25 520°
6 823	5.249 (15)	5.283 (15)	22 760°	22 860°
10 000	1.323 (15)	1.329 (15)	22 350°	22 350°

Température effective T_e

	E_1	E_2
$T_e =$	27 300°	26 360°
$\theta_e =$	0.1841	0.1912

Températures de couleur T_c

		E_1	E_2	
$\Phi(T_c)$	$\lambda = 3\ 646 -$	0.688	0.675	(U V)
	$3\ 646 +$	0.484	0.472	(visible)
	$3\ 646-4\ 500$	0.561	0.541	
	$3\ 646-6\ 000$	0.644	0.630	
T_c	$\lambda = 3\ 646 -$	27 300°	28 200°	U-V
	$3\ 646 +$	64 500°	70 900°	visible
	$3\ 646-4\ 500$	53 000°	60 700°	
	$3\ 646-6\ 000$	43 100°	46 200°	
p	$3\ 646 -$	0.70	0.68	U-V
	$3\ 646 +$	0.23	0.20	visible
	$3\ 646-6\ 000$	0.36	0.33	

Type spectral :	E_1	E_2
discontinuité de Lyman	1.461	1.251
« de Balmer	0.072	0.088
Type	B_A	$B_{1.5}$

(Le nombre entre parenthèses est la puissance de 10 par laquelle il faut multiplier le nombre correspondant de la table.)

α) *Discontinuités.*

$$(36) \quad D_{\text{Lyman}} = \log \frac{\mathcal{F}_{912+}}{\mathcal{F}_{912-}}$$

$$(37) \quad D_{\text{Balmer}} = \log \frac{\mathcal{F}_{3646+}}{\mathcal{F}_{3646-}}$$

d'où le *type spectral*, selon CHALONGE et BARBIER [1].

β) Les *températures de brillance* définies par la relation :

$$(38) \quad B_{\lambda}(T_{B\lambda}) = \mathcal{F}_{\lambda}(\tau = 0).$$

γ) Les gradients et les fonctions Φ qui permettent de définir les *températures de couleur* [2].

On sait que

$$(39) \quad \Phi(T_e) = \frac{14320}{T_e} \left(1 - e^{-\frac{14320}{\lambda T_e}} \right)^{-1}$$

$$(40) \quad G_{T_e, T_o} = -2,30 \frac{d}{d(1/\lambda)} \log \frac{\mathcal{F}_{\lambda}(T_o)}{B_{\lambda}(T_e)}$$

avec

$$(41) \quad G_{T_e, T_o} = \Phi(T_e) - \Phi(T_o).$$

De $G_{T_o T_e}$ nous déduisons $\Phi(T_e)$ puisque $\Phi(T_o)$ est connu. On a utilisé pour ce calcul la table de KIENLE [10].

Nous remarquons ⁽¹⁾ que dans le domaine étudié les températures de couleur et de brillance croissent si la température effective décroît : ce résultat a été observé antérieurement par CHALONGE et BARBIER [1].

On a calculé également les quantités p introduites par CHALONGE et DIVAN [4]. Les valeurs obtenues diffèrent assez peu de celles que ces auteurs ont calculé à partir des données de KUIPER.

24. — e) *Température effective et température de couleur.*

α) Pour chacun des deux modèles, on a obtenu le rapport $\frac{\theta_e}{\theta_0}$. Ce rapport permet en quelque sorte d'évaluer l'écart par rapport au cas gris.

Dans le tableau 8 et sur la figure 11, on a rassemblé les données relatives aux différents modèles calculés par les différents auteurs. Il semble que notre résultat soit satisfaisant, comparé à celui de Miss A. B. UNDERHILL. On voit que la valeur trouvée par RUDKJØBING est bien meilleure que la valeur grise sans être pour autant suffisante.

β) Notons que le rapport θ_e/θ_0 sera encore diminué si l'on tient compte de la zone convective (comme le suggère la figure 1 du chapitre I et comme RUDKJØBING l'a déjà fait remarquer).

Notons également que, tandis que $\frac{d(\theta_e/\theta_0)}{d\theta_0}$ est négatif dans la zone de tempé-

⁽¹⁾ Ce point a été développé par l'auteur récemment (*C. R. Acad. Sc.*, **231** (1950), 821).

ratures que nous avons étudiée, ce nombre est positif dans la zone étudiée par RUDKJØBING (zone qui correspond à des étoiles plus chaudes). Nous ne sommes donc pas loin du cas où le nombre θ_e/θ_0 passe par un minimum (écart maximum par rapport au cas gris). Pour les étoiles « infiniment » chaudes où la diffusion

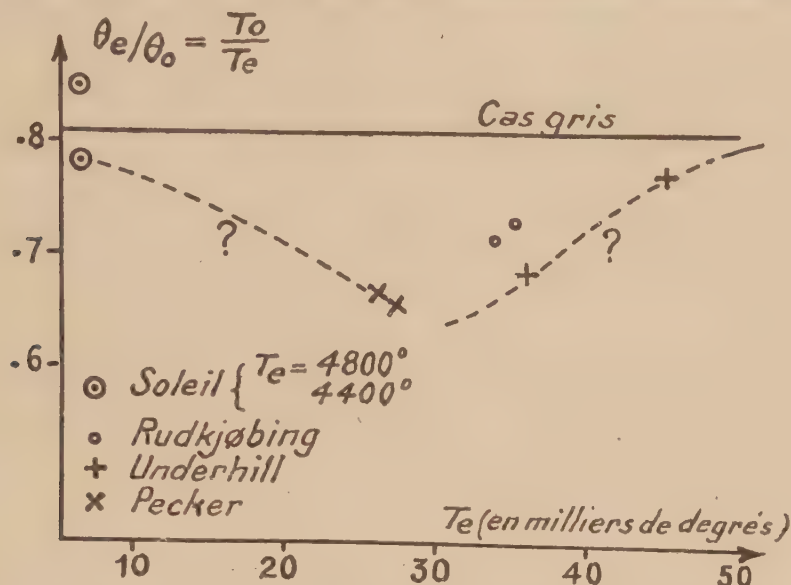


FIG. 11. — Température effective et température superficielle.

TABLEAU VIII

Température de surface et température effective

<i>Cas gris</i>	$\frac{\theta_e}{\theta_0} = 0.810$	(étoiles très chaudes : 05 ?)		
<i>M. Rudkjøbing</i>	$\theta_0 =$	0.21	0.20	
	$\log g = 4.26$	0.72	0.73	
	4.54	0.71	0.72	
	4.83	0.70	0.71	($\zeta_{\text{He}} = 0.15$)
<i>A. B. Underhill</i>	$\log g = 4.2$	$\theta_e = 0.137$	$\frac{\theta_e}{\theta_0} \sim 0.68$	(09.5)
	($\zeta_{\text{He}} = 0.15$)	$\theta_e = 0.113$ ⁽¹⁾	~ 0.78	(05)
<i>Présent travail</i>	$\log g = 4.48$	$\theta_e = 0.184$	$\theta_e/\theta_0 \sim 0.65$	(E ₁)
	($\zeta_{\text{He}} = 0$)	$\theta_e = 0.191$	~ 0.66	(E ₂)
<i>Soleil</i>	Température surface = 4 800° : $\theta_e/\theta_0 \sim 0.84$			
	= 4 400° ~ 0.77			
	(La discussion de cette valeur sera faite dans le chapitre suivant.)			

⁽¹⁾ Ce modèle m'a été obligeamment communiqué par Miss UNDERHILL avant publication. Voir *Astron. J.*, 55 (1950), 185.

grise par les électrons libres joue seule un rôle, on est en effet dans le cas gris. On est également assez près du cas gris dans le cas des étoiles plus froides que celles que nous étudions, les discontinuités devenant alors beaucoup plus faibles.

γ) Nos résultats correspondent à la seule valeur de la gravité $\log g = 4.5$. RUDKJØBING a étudié l'influence de la gravité sur le rapport θ_e/θ_0 (tableau 8).

Rappelons à ce propos le théorème suivant, démontré par l'auteur [15], théorème qui ne peut s'appliquer dans le cas qui nous intéresse, mais qui est probablement valable dans certains cas particuliers (étoiles d'hydrogène pur et suffisamment froides).

Dans une atmosphère en équilibre radiatif le rapport T_e/T_0 est indépendant de la gravité pourvu que le coefficient d'absorption par gramme de matière se mette sous la forme :

$$\kappa = \kappa_1(T, \lambda) \kappa_2(T, p_e)$$

(où κ_1 dépend seulement de la longueur d'onde et de la température et κ_2 seulement de la pression électronique et de la température).

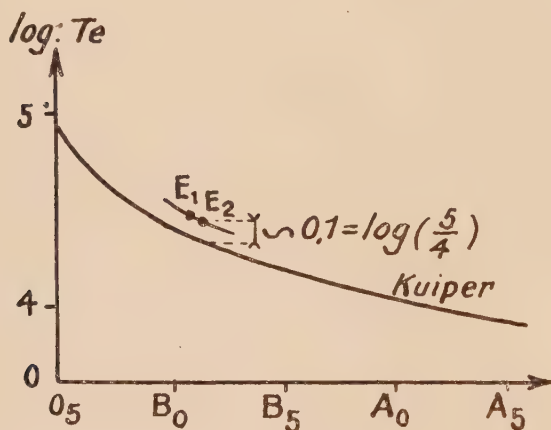


FIG. 12. — Modifications à apporter à l'échelle de températures de KUIPER.

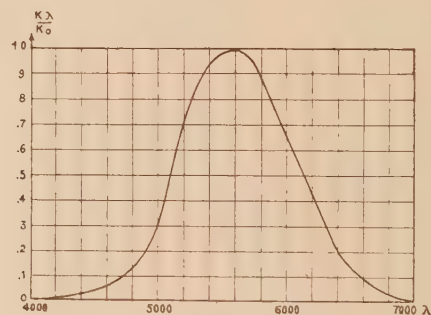


FIG. 13. — Courbe de sensibilité de l'œil, selon FABRY [7].

C) Conclusions : Échelle de température et correction bolométrique.

25. — a) On sait déjà que l'échelle de température utilisée par KUIPER conduit à une sous-estimation des températures des étoiles de type O et B. Nous voyons sur le diagramme de la figure 12 qu'il en est effectivement ainsi et qu'il faudra sans doute déplacer les étoiles B d'environ une demi-magnitude dans le diagramme d'HERTZPRUNG-RUSSELL.

26. — b) Toutefois, on doit remarquer que la relation entre la correction bolométrique et la température effective proposée par KUIPER est encore valable.

Nous avons calculé la correction bolométrique de la façon suivante :

La courbe de sensibilité de l'œil, telle qu'elle est donnée par FABRY [7] (fig. 13) est connue à une constante près,

On a, pour une étoile donnée :

$$\Delta_B m_* = 2.5 \left(\log \left[A \int_0^\infty \frac{K_\lambda}{K_0} \mathfrak{F}_\lambda d\lambda \right] - \log \left[\int_0^\infty \mathfrak{F}_\lambda d\lambda \right] \right).$$

La constante A est déterminée par l'application de cette formule au cas du soleil.

On sait dans ce cas que

$$\Delta_B m = -0.11 \quad [12]$$

$$\int \mathfrak{F}_\lambda d\lambda = 1.950 \cdot 10^{10} \quad (\text{constante solaire}).$$

D'où

$$\log A = \bar{1}.265.$$

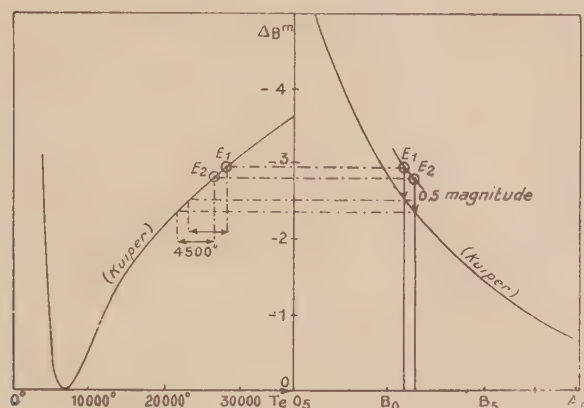


FIG. 14. — Correction bolométrique, température effective et type spectral.

TABLEAU IX

Correction bolométrique

Présent travail :

$$E_1 : B_1 \quad (T_e = 27\,300^\circ) \quad \Delta_B m = -3.00$$

$$E_2 : B_{1.5} \quad (T_e = 26\,360^\circ) \quad \Delta_B m = -2.83$$

Tableaux de Kuiper (extrait)

$T_e =$	$\Delta_B m =$	Type	$\log T_e =$
20 000°	2.18	B ₃	4.27
22 000°	2.40	B ₂	4.31
25 000°	2.69	B ₁	4.36
30 000°	3.12	B ₀	4.40
35 000°	3.5	O ₉	4.50
40 000°	3.8		

(*) On aurait pu mener ce calcul d'une façon plus grossière mais plus rapide, en écrivant :

$$A \int_0^\infty \frac{K_\lambda}{K_0} \mathfrak{F}_\lambda d\lambda = \int_{\lambda_0}^\infty \mathfrak{F}_\lambda d\lambda,$$

et en choisissant λ_0 de façon que la correction correspondant au corps noir soit la même que celle calculée par HERTZPRUNG de façon rigoureuse. Pour passer de l'échelle de HERTZPRUNG à celle de KUIPER, il aurait fallu ensuite ajouter 0.10 à $\Delta_B m$. On trouve $\lambda_0 = 3100 \text{ \AA}$ et des résultats à peu près identiques.

On en déduit pour les deux étoiles E_1 et E_2 les valeurs de la correction bolométrique et on peut comparer ces résultats au tableau de KUIPER.

L'accord entre la relation ($\Delta_B m$, T_e) de KUIPER et la nôtre est très bon (tableau 9, fig. 14), mais la correction bolométrique étant en général calculée au moyen de la donnée du type spectral et non de la température effective, il s'ensuit une sous-estimation de la correction bolométrique.

Manuscrit reçu le 4 juin 1950.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBIER D., CHALONGE D., *Ann. Astr.*, **4**, 1941, 30.
- [2] BARBIER D., CHALONGE D., KIENLE H., *Ann. Astr.*, **1**, 1938, 396.
- [3] BIRGE, *Rev. Mod. Phys.*, 1941, 233.
- [4] CHALONGE D., DIVAN L., *C. R. Ac. Sc.*, **230**, 1950, 720 (*Contr. IAP*, 59 A).
- [5] CHANDRASEKHAR S., *Ap. J.*, **101**, 1945, 348.
- [6] DUFAY J., LIAU SSU PIN, *Ann. Astr.*, **1**, 1938, 223.
- [7] FABRY, *Les principes de la photométrie en Astronomie et Physique*, Gauthier-Villars.
- [8] GOLDBERG L., *Ap. J.*, **90**, 1939, 414.
- [9] HUANG S. S., *Ap. J.*, **108**, 1948, 354.
- [10] KIENLE H., *Z. f. Astr.*, **20**, 1941, 239.
- [11] KOURGANOFF V., *C. R. Acad. Sci.*, 22 décembre 1947 (*Contr. IAP*, A 10); — *C. R. Acad. Sci.*, 3 novembre 1948 (*Contr. IAP*, A 31); — *C. R. Acad. Sci.*, 24 janvier 1949 (*Contr. IAP*, A 36). *Ann. Astr.*, **12**, 1949.
- [12] KUIPER H. G., *Ap. J.*, **88**, 1938, 429.
- [13] MICHARD R., *Ann. Astr.*, **12**, 1949.
- [14] MUSTEL E. R., *Astr. J. Sov. Un.*, **17**, 1940, 2; **18**, 1941, 4, 5; **21**, 1944, 4; — *Public Sternberg St. Astr. Inst.*, 1940, U. R. S. S.
- [15] PECKER J. C., *C. R. Acad. Sci.*, **226**, 1948, 1961 (*Contr. IAP*, A 20).
- [16] PECKER J. C., SCHATZMAN E., *Ann. Astr.*, **10**, 1947, 181 (*Contr. IAP*, B 15).
- [17] RUDKJØBING M., Thèse. *Publ. mind. Medd. Kob. Obs.*, **145**, 1947; — *Ann. Astr.*, **9**, 1946, 7; *Pub. mind. Medd. Kob. Obs.*, **143**, 1946.
- [18] SCHATZMAN E., *Le spectre des naines blanches et leur débit d'énergie. Public. Obs.*, Copenhague, **25**, 7, (1950).
- [19] STRÖMGREN B., *Astr. J.*, **53**, 1948, 107; et communication privée.
- [20] STRUVE O., *Ap. J.*, **99**, 1944, 89.
- [21] UNDERHILL A. B., *Ap. J.*, **111**, 1950, 203; — *M. N.* **109** (1949), 562; — *Public. Obs.*, Copenhague, **25**, 13, (1950).
- [22] UNSÖLD A., *Z. f. Astrophys.*, **21**, 1941, 1; — **22**, 1942, 229; — **23**, 1944, 75.
- [23] VINTI J. P., *Phys. Rev.*, **42**, 1932, 632; — **44**, 1933, 524.
- [24] VORONTSOV-VELYAMINOV B. A., *Astr. J. Sov. Union*, **24**, 1947, 2.
- [25] WEENEN J., Thèse, Amsterdam (octobre 1949).

IV. — La formation des raies dans les spectres stellaires.

par Jean-Claude PECKER

(Institut d'Astrophysique)

SOMMAIRE. — On peut calculer simplement les intensités des raies des spectres stellaires, en mettant les largeurs équivalentes sous la forme :

$$w \sim \int_0^\infty g(\tau) b(\tau) \Psi[x(\tau), a(\tau)] d\tau$$

où : la fonction de poids $g(\tau)$ ne dépend que de l'absorption continue dans l'atmosphère de l'étoile et peut par suite, être calculée à priori pour une étoile donnée (cette fonction a été introduite par UNSÖLD et MINNAERT dans le cas des raies faibles) ;

— la fonction $b(\tau)$ dépend de l'ionisation et de l'excitation de l'atome susceptible d'absorber la raie étudiée (la fonction $x(\tau)$ se déduit de la fonction $b(\tau)$) ;

— la fonction de saturation Ψ , est égale à 1 au voisinage de la surface et décroît vers zéro dans les grandes profondeurs d'autant plus vite que la raie est plus forte. Pour les raies faibles $\Psi = 1$ dans toute l'atmosphère. La fonction $a(\tau)$ est le rapport de la constante d'amortissement à la largeur Doppler de la raie.

Ce calcul peut s'appliquer dans des conditions très générales, avec une grande précision (2 % dans les cas les plus défavorables).

Les applications, citées à titre d'exemple, sont nombreuses : courbes de croissance, détermination des abondances, interprétation de la variation centre bord de certaines raies solaires, etc.,

Dans les appendices, l'auteur a rassemblé quelques formules utiles au calcul de $b(\tau)$ et de $a(\tau)$, des remarques facilitant le calcul des fonctions de poids, et une table sommaire de la fonction de saturation.

A) MÉTHODE DE CALCUL DE LA LARGEUR ÉQUIVALENTE DES RAIES D'ABSORPTION EN UN POINT DU DISQUE

I. Introduction.

1. — Dans les parties précédentes, nous avons montré comment on peut construire des modèles d'atmosphère.

Nous supposons dans tout ce qui suit que nous savons calculer un tel modèle à partir de la donnée du seul coefficient d'absorption continue et des grandeurs T_e , g et de la composition chimique de l'étoile.

Mais le problème du rattachement de ce modèle aux observations, c'est-à-dire au spectre de l'étoile, n'en est pas résolu pour autant. De plus notre modèle est peut-être inexact, au moins pour les étoiles froides, puisque nous n'avons tenu

compte pour le calculer que du coefficient d'absorption continue, l'absorption dans les raies étant considérée comme négligeable.

L'objet des deux parties suivantes de notre étude est donc de résoudre ces deux problèmes :

a) Le calcul des *largeurs équivalentes* des raies à partir du modèle. La solution de ce problème permettrait le calcul des *courbes de croissance*, la détermination des *abondances*, *l'interprétation des mesures d'assombrissement*, c'est-à-dire de la variation des raies du centre au bord du disque des étoiles pour lesquelles cette étude est possible (soleil, variables à éclipse) et le calcul du *type spectral*.

b) Le problème du « *blanketing effect* », c'est-à-dire le calcul d'un modèle tenant compte de l'absorption dans les raies.

2. *Avantages de la méthode proposée.* — Depuis l'époque où l'on représentait schématiquement l'atmosphère d'une étoile par une photosphère (source du fond d'émission continue) surmontée d'une couche renversante (origine des raies d'absorption), bien des tentatives ont été faites pour permettre le calcul des largeurs des raies d'absorption. Il n'est pas lieu ici d'en entreprendre une étude historique qui serait fatalement injuste ou trop longue. Le lecteur trouvera en tête de la bibliographie une courte liste des mémoires récents publiés sur la question.

Rappelons seulement que la plupart de ces méthodes reposent sur certaines approximations :

- a) approximations sur la *répartition* des atomes absorbants ;
- b) approximations sur le *coefficient d'absorption* dans les raies (ou, plus précisément, sur le rapport de ce coefficient au coefficient d'absorption continue) ;
- c) approximations sur la *variation* de l'intensité rayonnante en fonction de l'angle d'émergence ; en particulier, les approximations bien connues d'EDDINGTON

$$\int_{-1}^{+1} I_{\nu} d\mu = 3 \int_{-1}^{+1} I_{\nu} \mu^2 d\mu = 2 \int_{-1}^{+1} I_{\nu} \mu d\mu$$

qui correspondent à la « *semi-isotropie* » de l'intensité :

$$I_{\nu}(\mu > 0) = I_{\nu+} \quad I_{\nu}(\mu < 0) = I_{\nu-}$$

I_{+} et I_{-} étant deux valeurs indépendantes de μ .

On sait dans quelle mesure ces approximations sont mauvaises (voir par exemple [10]).

La méthode que nous proposons dans ce travail s'est libérée de toutes ces approximations. Elle constitue une généralisation aux raies d'absorption *moyennes* ou *fortes* d'une méthode proposée depuis plusieurs années par UNSÖLD [29] puis envisagée sous un angle différent par MINNAERT [12], méthode qui permettait de calculer l'intensité dans les *ailes* d'une raie, ou la largeur équivalente des raies *faibles*.

3. *Position du problème.* Le problème envisagé ici est simple à formuler analytiquement. En un point quelconque de la raie, l'intensité est définie par l'équation du transfert monochromatique :

$$(1) \quad \mu \frac{dI_v}{\rho dx} = -(\kappa + \kappa_v + \sigma_v)(I_v - S_v)$$

où la fonction-source S_v est définie par l'équation assez générale (voir § 5) :

$$(2) \quad S_v = \frac{\sigma_v}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} \bar{I}_v + \frac{\eta \kappa_v + \kappa}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} B_v.$$

L'intensité dans le fond continu voisin est définie par l'équation de transfert :

$$(3) \quad \mu \frac{dI}{\rho dx} = -\kappa(I - S)$$

où

$$(4) \quad S = B_v \quad (\text{cas « restreint » de Milne}).$$

Comme à l'habitude, nous poserons :

$$\begin{cases} d\tau = -\kappa \rho dx \\ d\tau_v = -\kappa_v \rho dx \\ ds_v = -\sigma_v \rho dx. \end{cases}$$

Nous supposons que B_v est une fonction connue de τ , c'est-à-dire qu'on a pu calculer un modèle, soit à partir des mesures d'assombrissement, soit à partir de la connaissance de l'absorption continue.

Il s'agit de calculer les quantités suivantes :

$$(5) \quad r(\tau, \mu, \lambda) = \frac{I - I_v}{I} \quad \text{profil de la raie en un point du disque (soleil)}$$

$$(6) \quad R(\tau, \lambda) = \frac{F - F_v}{F} \quad \text{profil de la raie sur le spectre global du disque (soleil, étoiles)}$$

$$(7) \quad w(\tau, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I - I_v}{I} d\lambda \quad \text{largeur équivalente en un point du disque (soleil)}$$

$$(8) \quad W(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F - F_v}{F} c\lambda \quad \text{largeur équivalente de la raie sur le spectre global du disque (soleil, étoiles).}$$

On remarquera que ce sont des quantités qui dépendent de τ alors qu'on se borne en général à calculer leur valeur pour $\tau = 0$. Dans la suite de notre étude, nous conserverons cependant cette grande généralité — au risque d'alourdir un peu les équations — en raison du besoin que nous en aurons au chapitre suivant dans la théorie du blanketing effect.

4. *Principe du calcul.* — Nous chercherons à établir des formules permettant de calculer les quantités ci-dessus (5) à (8) à partir de tables préliminaires calculées à l'avance pour une atmosphère déterminée. Ces tables grouperont les valeurs des fonctions de poids — qui représentent l'influence de l'absorption continue sur

la formation des raies d'absorption — et des fonctions de saturation — qui permettront de calculer des raies fortes d'absorption aussi bien que des raies faibles.

Pour aboutir à ces formules, il est nécessaire de connaître certaines propriétés analytiques des coefficients d'absorption dans les raies et la façon dont ces coefficients d'absorption dépendent de la température, de la longueur d'onde.... Nous rappelons certaines de ces propriétés dans l'Appendice 1.

5. *Généralité du calcul.* — Avant de nous engager dans le développement des calculs, nous remarquerons que l'équation de transfert utilisée est très générale. Elle ne suppose pas l'équilibre radiatif réalisé. Mais cependant, elle suppose que l'atmosphère est plane, que la fonction source est indépendante du cosinus de l'angle d'émergence, μ , que la diffusion est cohérente et isotrope et que la diffusion par les électrons libres est négligeable.

Nous montrerons pourtant plus loin comment on peut introduire sans difficultés certains perfectionnements dans la méthode et la rendre plus générale.

II. Transformation de l'équation de transfert.

6. — Nous pouvons mettre l'équation (1) sous la forme :

$$(9) \quad \mu > 0 \quad I_{v+}(\tau, \mu) = e^{(\tau + \tau_v + s_v)/\mu} \int_{\tau}^{\infty} S_v(\tau') e^{-(\tau' + \tau'_v + s'_v)/\mu} \frac{d(\tau' + \tau'_v + s'_v)}{\mu}$$

$$(10) \quad \mu < 0 \quad I_{v-}(\tau, \mu) = - e^{(\tau + \tau_v + s_v)/\mu} \int_0^{\tau} S_v(\tau') e^{-(\tau' + \tau'_v + s'_v)/\mu} \frac{d(\tau' + \tau'_v + s'_v)}{\mu}$$

où la seule variable d'intégration est la profondeur optique *continue*. Dans le spectre continu voisin, on a de même les équations :

$$(11) \quad \mu > 0 \quad I_+(\tau, \mu) = e^{\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} B_v(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}$$

$$(12) \quad \mu < 0 \quad I_-(\tau, \mu) = - e^{\tau/\mu} \int_0^{\tau} B_v(\tau') e^{-\tau'/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}$$

On en déduira aisément $r = \frac{I - I_v}{I}$. Écrivons d'abord :

$$(13) \quad \begin{aligned} I_+ - I_{v+} &= \int_{\tau}^{\infty} B_v e^{(\tau - \tau')/\mu} [1 - e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu}] \frac{d\tau'}{\mu} \\ &\quad - \eta \int_{\tau}^{\infty} B_v e^{(\tau - \tau')/\mu} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{d\tau'_v}{\mu} \\ &\quad - \int_{\tau}^{\infty} \bar{I}_v e^{(\tau - \tau')/\mu} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{ds'_v}{\mu} \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} I_- - I_{v-} &= - \int_0^{\tau} B_v e^{(\tau - \tau')/\mu} [1 - e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu}] \frac{d\tau'}{\mu} \\ &\quad + \eta \int_0^{\tau} B_v e^{(\tau - \tau')/\mu} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{d\tau'_v}{\mu} \\ &\quad + \int_0^{\tau} \bar{I}_v e^{(\tau - \tau')/\mu} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{ds'_v}{\mu} \end{aligned}$$

Une intégration par partie permet de transformer la première intégrale des seconds membres des équations (13) (14), de la façon suivante :

$$(15) \quad \int_a^b \dot{U} dV = [UV]_a^b - \int_a^b V dU$$

$$(16) \quad \text{Ici : } \begin{cases} U_{\pm} = 1 - e^{[(\tau_V - \tau'_V) + (s_V - s'_V)]/\mu} ; & U_{\pm}(\tau = \tau') = 0 \\ V_+ = - \int_{\tau'}^{\infty} B_V e^{(\tau - \tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu} ; & V_+(\infty) = 0 \\ V_- = + \int_{\tau'}^{\infty} B_V e^{(\tau - \tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu} ; & V_-(0) = 0. \end{cases}$$

Il est donc possible d'écrire maintenant :

$$(17) \quad \mu > 0 \quad r_+(\tau, \mu) = f_+ \int_{\tau}^{\infty} g_{+1}(\tau' \mu) e^{[(\tau_V - \tau'_V) + (s_V - s'_V)]/\mu} d\tau'_V \\ + f_+ \int_{\tau}^{\infty} g_{+2}(\tau' \mu) e^{[(\tau_V - \tau'_V) + (s_V - s'_V)]/\mu} ds'_V$$

$$(18) \quad \mu < 0 \quad r_-(\tau, \mu) = f_- \int_0^{\tau} g_{-1}(\tau' \mu) e^{[(\tau_V - \tau'_V) + (s_V - s'_V)]/\mu} d\tau'_V \\ + f_- \int_0^{\tau} g_{-2}(\tau' \mu) e^{[(\tau_V - \tau'_V) + (s_V - s'_V)]/\mu} ds'_V$$

avec les définitions suivantes des fonctions f et g (*fonctions de poids*)

$$(19) \quad g_{+1}(\tau' \mu) = \frac{\frac{1}{\mu} \int_{\tau'}^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \eta B_V e^{-\tau'/\mu}}{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

$$(20) \quad g_{+2}(\tau' \mu) = \frac{\frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \bar{I}_V e^{-\tau'/\mu}}{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

$$(21) \quad g_{-1}(\tau' \mu) = \frac{-\frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \eta B_V e^{-\tau'/\mu}}{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

$$(22) \quad g_{-2}(\tau' \mu) = \frac{-\frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \bar{I}_V e^{-\tau'/\mu}}{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

$$(23) \quad f_+(\tau, \mu) = \frac{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}{\int_{\tau}^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'} ;$$

$$(24) \quad f_-(\tau, \mu) = \frac{\int_0^{\infty} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}{\int_0^{\tau} B_V e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

Les fonctions antérieurement introduites par UNSÖLD et MINNAERT et tabulées par l'auteur [18] dans le cas solaire, sont les fonctions correspondant à $\tau = 0$ (rayonnement observable)

$$\begin{aligned} g_1(\tau', \mu) &\equiv g_{+1}(\tau', \mu) f_{+}(0, \mu) = g_{+1}(\tau', \mu) \\ g_2(\tau', \mu) &\equiv g_{+2}(\tau', \mu) f_{+}(0, \mu) = g_{+2}(\tau', \mu) \end{aligned}$$

puisque $f_{+}(\tau = 0, \mu) = 1$. Les fonctions g_{-} et f_{-} qui correspondent à l'intensité du rayonnement dirigé vers l'intérieur de l'étoile sont envisagées ici pour la première fois.

Les *fonctions de poids* affectées d'un indice 1 se rapportent à l'absorption, les fonctions affectées de l'indice 2 à la diffusion.

On voit que les fonctions de poids g_1 correspondant à l'absorption et les fonctions f sont calculables a priori, à partir de la seule donnée de la fonction $B(\tau)$ qui caractérise le modèle, et sans qu'il soit nécessaire de rien connaître sur la formation de la raie considérée : nous aurons donc bien réussi à *séparer* dans le calcul l'utilisation des données de l'absorption continue et celle des données relatives à l'absorption sélective dans les raies.

Dans le cas des fonctions de poids g_2 (qui correspondent à la diffusion), cette séparation ne peut pas être faite en toute rigueur, les expressions (20) et (22) de $g_{\pm 2}$ faisant intervenir la fonction $\bar{I}_\nu$, qui varie du centre aux ailes de la raie. Nous montrerons cependant dans l'Appendice 2 comment nous pouvons, dans les cas particuliers (raies faibles et ailes des raies fortes d'une part, partie centrale des raies fortes d'autre part), remplacer ces fonctions par de véritables fonctions de poids calculables a priori. Dans ce qui suit, nous supposons que nous avons effectivement à notre disposition de telles fonctions.

En définitive, en intégrant seulement par rapport à la profondeur optique continue, on aura :

$$(25) \quad r_{\pm}(\tau, \mu) = f_{\pm} \left[\int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm 1} e^{[(\tau - \tau') + (s - s')]/\mu} \frac{\kappa_{\nu}}{\chi}(\tau') d\tau' + \int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm 2} e^{[(\tau - \tau') + (s - s')]/\mu} \frac{\sigma_{\nu}}{\chi}(\tau') d\tau' \right]$$

où

$$\begin{cases} \beta = \infty \\ \alpha = \tau \end{cases} \text{ si le signe est } +$$

$$\begin{cases} \beta = \tau \\ \alpha = 0 \end{cases} \text{ si le signe est } -.$$

Les fonctions g sont des fonctions de τ' et μ .

Les fonctions f sont des fonctions de τ et μ .

La première des deux intégrales correspond à l'*absorption* ; la seconde à la *diffusion*. Cette formule permet le calcul du profil d'une raie en un point du disque, c'est-à-dire essentiellement des raies *solaires*.

Dans ce qui suit, et pour alléger l'écriture, nous écrirons seulement une des deux intégrales, et nous supprimerons l'indice 1 ou 2 des fonctions g_1 et g_2 (cas de l'absorption pure ou de la diffusion pure).

7. *Comparaison avec les formules d'UNSÖLD-MINNAERT.* — La formule (25) est rigoureusement équivalente aux équations de transfert (1) et (2), sans aucune approximation.

Si nous limitons notre étude aux raies faibles ou bien aux ailes des raies fortes, nous pourrions considérer que κ_v et σ_v sont des nombres très petits par rapport à κ et que $\tau_v - \tau'_v$ et $s_v - s'_v$ sont très petits par rapport à τ . On pourrait écrire :

$$e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \simeq 1.$$

Nous retrouverions alors les formules mêmes proposées par UNSÖLD et MINNAERT.

III. Largeur équivalente d'une raie solaire.

8. — Le problème qui se pose maintenant est le calcul de

$$w(\tau, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} r \, d\lambda.$$

Nous nous efforcerons, ici encore, de mettre w sous une forme telle que le plus grand nombre possible de calculs puissent être faits à partir de la seule connaissance du modèle de l'atmosphère considérée. Dans ce but, nous intervertirons l'ordre des intégrations par rapport à λ et τ , de la façon suivante.

En rapprochant la définition (7) de l'équation (25), nous pourrions écrire, en supposant que $f_{\pm}$ et $g_{\pm}$ sont indépendants de la longueur d'onde dans la raie (on verra dans l'Appendice 2 dans quelle mesure cette hypothèse est légitime).

$$(26) \quad w_{\pm} = f_{\pm} \int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{\kappa_v + \sigma_v}{\kappa} d\lambda \right] d\tau'.$$

Or, on a

$$(27) \quad \tau_v + s_v = \int_0^{\tau} \frac{\kappa_v + \sigma_v}{\kappa} dt = A_m \int_0^{\tau} n(t) \frac{k_v(t)}{k(t)} dt = \int_0^{\tau} b(t) k_v(t) dt$$

où

$$(28) \quad b(t) = A_m \frac{n(t)}{k(t)}.$$

A_m désignant le rapport du nombre d'atomes considérés au nombre d'atomes d'hydrogène neutre.

$k(t)$ le coefficient d'absorption continu par atome d'hydrogène neutre.

$k_v(t)$ le coefficient d'absorption par atome absorbant.

$n(t)$ la fraction des atomes considérés excitée dans l'état initial de la transition correspondant à la raie étudiée.

Nous pourrions donc écrire :

$$(29) \quad w_{\pm} = f_{\pm} \int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{\mu} \int_{\tau'}^{\tau} b k_{\nu} dt} b k_{\nu} d\lambda \right] d\tau.$$

Il s'agit maintenant de transformer cette équation pour la rendre calculable.

Nous connaissons (Appendice 1) l'expression du coefficient d'absorption atomique :

$$(30) \quad k(\tau) = k_0(\tau) H(a, \nu).$$

Nous pourrions écrire, en appliquant une formule de moyenne :

$$(31) \quad \int_{\tau}^{\tau'} b(t) k_{\nu}(t) dt = \int_{\tau}^{\tau'} b(t) k_0(t) H(a, \nu_t) dt = H\left(a, \frac{\nu_{\tau'}}{\omega_{\lambda}}\right) \int_{\tau}^{\tau'} b(t) k_0(t) dt.$$

Cette équation définit un coefficient ω_{λ} qui varie du centre aux ailes de la raie :

On a :

au centre de la raie	$\nu = 0$	et $\omega_{\lambda} = 1$
aux grandes profondeurs	$\nu = 0$	et $\omega_{\lambda} = 1$
à la surface	$\tau = \tau' = 0$	et $\omega_{\lambda} = 1$.

De façon générale, ω_{λ} est voisin de 1 car ν dépend peu de τ : à partir de la définition de ν (Appendice 1) et de la constatation que $H(a, \nu)$ est une fonction décroissante de ν et ν une fonction décroissante de τ , le théorème de la moyenne permettra d'écrire :

$$(32) \quad \sqrt{\frac{T(\tau)}{T(\tau')}} \leq \omega_{\lambda} \leq 1.$$

(Il est aisé de voir que ω_{λ} sera d'autant plus éloigné de 1 que $b k_0(\tau)$ est proche d'une constante.)

Nous aurons alors :

$$(33) \quad w_{\pm}(\tau, \mu) = f_{\pm} \int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm} b k_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(a, \nu_{\tau'}) e^{-\frac{1}{\mu} H\left(a, \frac{\nu_{\tau'}}{\omega_{\lambda}}\right) \int_{\tau'}^{\tau} b k_0 dt} d\lambda \right] d\tau'.$$

C'est ici que va intervenir la seule approximation de notre calcul : nous allons considérer, dans l'intégrale portant sur λ , ω_{λ} comme dépendant peu de λ et nous ferons l'intégration en supposant cette quantité constante.

La fonction entre crochets est alors calculable à l'avance en fonction de ω , de a , et de la nouvelle variable x définie par l'équation :

$$(34) \quad x = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} b(t) k_0(t) dt$$

la variable x est toujours positive, car si $\mu < 0$, les intégrations utiles se font entre 0 et τ et par suite $\tau' < \tau$. Cette variable est proportionnelle au produit $A_m f$ de l'abondance de l'élément considéré par la force d'oscillateur correspondant à la transition étudiée.

En utilisant alors l'expression de $k_0(\tau)$ rappelée dans l'appendice 1, nous pourrions écrire :

$$(35) \quad w_{\pm}(\tau, \mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2 \lambda_0^2}{mc} f \times f_{\pm} \int_{\alpha}^{\beta} g_{\pm} b(\tau') \Psi(x, a, \omega) d\tau'$$

où

a, ω sont des fonctions de τ'
 x est une fonction de τ, τ', μ

où

$$\begin{cases} \beta = \infty \\ \alpha = \tau \end{cases} \text{ si le signe est } +$$

$$\begin{cases} \beta = \tau \\ \alpha = 0 \end{cases} \text{ si le signe est } -$$

et où Ψ désigne la *fonction de saturation*.

$$(36) \quad \Psi(x, a, \omega) = \int_0^{\infty} H(a, v) e^{-xH\left(a, \frac{v}{\omega}\right)} dv.$$

Dans l'Appendice 3, nous montrerons comment on peut calculer cette intégrale. Nous joindrons à cette étude une table succincte de la fonction de saturation.

IV. Précision de l'approximation utilisée.

9. — La seule approximation du calcul ci-dessus s'introduit dans le calcul de ω . Nous allons montrer maintenant que ω peut être évalué exactement dans deux cas particuliers importants : celui des raies très fortes et celui des raies assez faibles, cas où $\omega(\tau, \mu)$ peut être évalué sans aucune approximation. Nous montrons ensuite que dans les cas les plus défavorables, l'erreur commise sur $\omega(\tau, \mu)$ en prenant $\omega = 1$ n'est jamais très grande. Nous donnerons de plus une méthode de calcul de ω permettant d'obtenir une précision encore plus grande.

10. *Raies assez faibles.* — Dans le cas des raies assez faibles, nous pouvons remplacer dans l'expression (29) l'exponentielle par son développement limité au terme du premier ordre. On obtient :

$$(37) \quad H(a, v_{\tau'}) e^{-\frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} b k_0 H(a, v_t) dt} \simeq \left[1 - \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} b k_0 H(a, v_t) dt \right] H(a, v_{\tau})$$

et selon (33) :

$$(38) \quad H(a, v_{\tau'}) e^{-\frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} b k_0 H(a, v_t) dt} \simeq \left[1 - H\left(a, \frac{v_{\tau}}{\omega}\right) x(\tau', \tau, \mu) \right] H(a, v_{\tau'}).$$

Après intégrations par rapport à la longueur d'onde, on a, en égalant les seconds membres :

$$(39) \quad x(\tau', \tau, \mu) \int_{-\infty}^{+\infty} H\left(a, \frac{v_{\tau'}}{\omega}\right) H(a, v_{\tau}) d\lambda = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} b(v) k_0(v) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(a, v_t) H(a, v_{\tau'}) d\lambda \right] dt.$$

On voit (Appendice 3) que cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(40) \quad \frac{\omega(\tau')}{\sqrt{1 + \omega^2(\tau')}} \int_{\tau}^{\tau'} \frac{b(t) dt}{\sqrt{T(t)}} = \int_{\tau}^{\tau'} \frac{b(t) \sqrt{T(\tau')} dt}{\sqrt{T(t)} \sqrt{T(\tau') + T(t)}}$$

qui permet de calculer exactement ω .

Remarquons que dans ce cas, la largeur équivalente $\omega(\tau, \mu)$ peut se mettre sous la forme :

$$(41) \quad w = K \int (1 - A \omega) g b d\tau'$$

où A doit être égal au plus à $\frac{1}{10}$ pour que l'approximation de l'exponentielle par les deux premiers termes de son développement soit encore valable.

C'est avec $A = \frac{1}{10}$ que nous avons calculé la valeur de $\frac{\omega(\omega = 1)}{\omega(\omega)}$ du tableau 1.

11. *Raies fortes.* — Dans le cas des raies très fortes, le profil est dû aux collisions ; on peut écrire :

$$(42) \quad H(a, v) \cong \frac{a}{v^2 \sqrt{\pi}}.$$

On a alors :

$$(43) \quad \frac{a}{v_{\tau'}^2 \sqrt{\pi}} \omega^2 x(\tau', \tau, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau'} \frac{a}{v_t^2 \sqrt{\pi}} b(t) k_0(t) dt.$$

Puisque

$k_0(t)$ est proportionnel à $T^{-1/2}$
et que $v^2(t)$ est proportionnel à T^{-1}

on peut écrire :

$$(44) \quad \omega^2 \int_{\tau}^{\tau'} \frac{b(t)}{\sqrt{T(t)}} dt = \frac{1}{\sqrt{T(\tau')}} \frac{1}{a(\tau')} \int_{\tau}^{\tau'} \sqrt{\frac{T(t)}{T(\tau')}} a(t) b(t) dt.$$

12. *Évaluation numérique de ω dans les deux cas ci-dessus.* — Nous disposons donc, dans le cas des raies assez faibles et des raies très fortes, de formules permettant un calcul *exact* de ω , donc de $\omega(\tau, \mu)$.

Évaluons donc $\omega(\tau')$ dans le cas solaire en un point situé au centre du disque $\tau = 0, \mu = 1$. Nous ferons l'approximation : $a = \text{constante}$; et dans les deux cas particuliers envisagés, nous étudierons successivement les deux cas $b k_0 = c^{\text{te}}$. (On sait que ce cas est particulièrement défavorable) et $b = c^{\text{te}}$.

Les résultats sont donnés dans le tableau 1.

Dans chaque cas, on a également calculé le nombre $\frac{w(0, \omega = 1, \mu = 1)}{w(0, \omega, \mu = 1)}$ et le nombre ω indépendant de τ' défini par l'équation suivante :

$$w(0, \bar{\omega}, \mu = 1) = w(0, \omega(\tau'), \mu = 1).$$

TABLEAU I

τ	RAIES ASSEZ FAIBLES		RAIES TRÈS FORTES	
	$bk_0 = \text{constante}$	$b = \text{constante}$	$bk_0 = \text{constante}$	$b = \text{constante}$
.0	1	1	1	1
.001	1	1	1	1
.01	1	1	1	1
.02	.998	.998	.999	.999
.05	.994	.995	.997	.997
.1	.984	.986	.993	.995
.2	.977	.979	.989	.990
.4	.965	.968	.982	.985
.6	.956	.959	.977	.980
1.	.944	.947	.970	.976
1.4	.935	.939	.967	.972
1.8	.928	.933	.964	.968
2.6	.918	.923	.958	.964
4.	.907	.912	.950	.959
6.	.899	.903	.942	.954
$\frac{w(\omega = 1)}{w(\omega)}$	.997	.997	1.017	1.013
$\bar{\omega}$	$.97 \cong \omega\left(\tau = \frac{1}{3}\right)$	$.97 \cong \omega\left(\tau = \frac{1}{3}\right)$	$.983 \cong \omega\left(\tau = \frac{1}{3}\right)$	$.987 \cong \omega\left(\tau = \frac{1}{3}\right)$

On voit que même dans les cas très défavorables, l'approximation $\omega = 1$ n'entraîne jamais une erreur supérieure à 2 % sur la largeur équivalente. Nous voyons de plus que l'approximation

$$(45) \quad \omega \cong \bar{\omega} = \omega\left(\tau = \frac{1}{3}\right)$$

conduit à des résultats encore plus satisfaisants.

De ce qui précède, on peut déduire la méthode pratique de calcul de la largeur équivalente d'une raie. Nous y reviendrons plus loin pour résumer la technique de cette méthode.

B) APPLICATIONS DANS LE CAS SOLAIRE

I. *Courbes de croissance.*

13. — On appelle « *courbe de croissance* » une courbe reliant la largeur équivalente w au produit $A_m f$ de l'abondance par la force d'oscillateur. On présente généralement cette courbe sous la forme d'une relation :

$$\log (w) \text{ fonction de } \log (A_m f).$$

Ces courbes sont construites de façon assez empirique. On les utilise pour la détermination des abondances et pour obtenir certaines informations sur l'état physique de l'atmosphère solaire (turbulences...). Elles ne peuvent donner de renseignements que sur des abondances relatives d'un métal par rapport à un autre, car elles ne sont connues qu'à une translation parallèle à l'axe des abondances près. Notre calcul permettra, non seulement de retrouver l'allure générale de ces courbes de croissance, mais encore de supprimer l'incertitude que nous venons de signaler : nous devons donc pouvoir déterminer des abondances exactement.

Toutefois l'amélioration que constitue un calcul théorique des courbes de croissance entraînera la nécessité de tenir compte en toute rigueur de la répartition en profondeur des atomes correspondant à chaque raie, répartition différente d'une raie à l'autre : nous aurons donc autant de courbes de croissance que de raies.

Nous pouvons cependant montrer qu'il est facile de retrouver de cette façon les courbes de croissance MILNE-EDDINGTON et SCHUSTER-SCHWARZSCHILD qui ont pu être calculées par d'autres auteurs, d'une façon souvent laborieuse.

Nous étudierons de plus, à titre d'exemple, le cas des courbes de croissance moléculaire où nous verrons une même courbe de croissance rendre compte d'un grand nombre de raies.

Notons de plus que la méthode proposée dans ce chapitre a été appliquée très récemment par CLAAS à la comparaison dans le cas solaire des courbes de croissance théoriques et expérimentales pour TiI. Les résultats sont très satisfaisants. (Je remercie M. CLAAS de l'aimable communication, avant publication, de ses résultats.)

14. *Courbe de croissance MILNE-EDDINGTON.* — Dans l'approximation MILNE-EDDINGTON, on aura :

$$(46) \quad \eta_\nu = \frac{\kappa_\nu + \sigma_\nu}{\kappa} = b(\tau) k_\nu(\tau) = \text{constante en fonction de la profondeur et ceci quel que soit } \nu.$$

Cette hypothèse est contradictoire, avec ce que nous savons de la fonction

$k_v(\tau)$ (Appendice 1). Mais nous pouvons cependant l'introduire dans l'expression (29) en posant :

$$(47) \quad \eta_v = \eta_0 H(a_0 v_0)$$

où l'indice zéro désigne les fonctions η , a , v prises à une profondeur donnée (celle par exemple qui correspond à la température effective de l'étoile).

Pour $\tau = 0$, on obtient :

$$(48) \quad w(0, \mu) = \int_0^\infty g \eta_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(a, v_0) e^{-H(a_0 v_0) \eta_0 \frac{\tau}{\mu}} d\lambda \right] d\tau'$$

$$(49) \quad \text{Soit } w(0, \mu) = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k}{\mu m_0}} \int_0^\infty g_\pm(\tau, \mu) \sqrt{T} \eta_0 \Psi \left(\frac{\eta_0 \tau'}{\mu}, a_0, 1 \right) d\tau'$$

ce qu'on peut écrire :

$$(50) \quad w(0, \mu) = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k}{\mu m_0}} \mu \int_0^\infty g[X(\tau)] \sqrt{T} \Psi[X, a_0, 1] dX$$

où on a posé

$$X = \frac{\eta_0 \tau'}{\mu}.$$

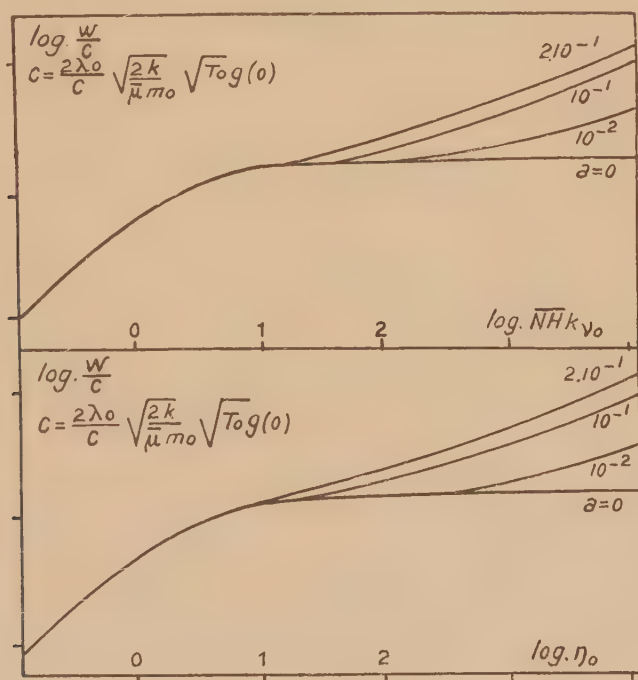


FIG. 1 et 2. — Courbes de croissance Milne Eddington (figure du dessus) et Schuster-Schwarzschild, (figure du dessous) au centre du disque solaire.

Sur la figure 1, nous construisons cette courbe dans le cas solaire pour

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ a = 0; 0,01; 0,1; 0,2 \\ \lambda = 5000 \text{ \AA.} \end{cases}$$

15. *Courbe de croissance* SCHUSTER-SCHWARZSCHILD. — Tous les atomes absorbants sont supposés réunis en une couche mince d'épaisseur τ_{v_0} à une profondeur optique *continue* $0 < \tau < \tau_0$ (où τ_0 est très petit).

On a alors :

$$\begin{cases} \eta_v = 0 & \text{si } \tau > \tau_0 \\ \eta_v = \eta_0 H(a_0 v_0), & \text{si } \tau < \tau_0 \end{cases} \text{ (l'indice zéro caractérise la surface de l'étoile).}$$

Donc

$$\begin{cases} x = \frac{\eta_0 \tau}{\mu} & \text{et } \omega = 1 & \text{si } 0 < \tau < \tau_0 \\ x = 0 & \text{»} & \tau > \tau_0 \end{cases}$$

$$(51) \quad \text{Par suite } w(0, \mu) = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k}{\mu m_0}} \int_0^{\tau_0} g(\tau\mu) \sqrt{T} \eta_0 \Psi\left(\frac{\eta_0 \tau}{\mu}, a_0, 1\right) d\tau.$$

Si τ_0 est très petit, on peut écrire :

$$(52) \quad w(0, \mu) = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2k}{\mu m_0}} g(0, \mu) \sqrt{T_0} \mu \int_0^{\eta_0 \frac{\tau_0}{\mu}} \Psi(x, a_0, 1) dx.$$

Si l'on fait tendre τ_0 vers zéro, on aura :

$$\eta_0 = \frac{\kappa_v(0)}{\kappa(0)} \quad \text{et} \quad \frac{\eta_0 \tau_0}{\mu} = \frac{\tau_{v_0}}{\mu}.$$

Soit en se ramenant aux notations usuelles :

$$(53) \quad \frac{\eta_0 \tau_0}{\mu} = \overline{NH} \frac{k_{v_0}}{\mu}$$

où $\overline{NH}$ est le « nombre d'atomes au-dessus d'un centimètre carré de la photosphère ».

On a donc tracé sur la figure 2 la courbe $\log w(0, \mu)$ en fonction de $\log \left(\overline{NH} \frac{k_{v_0}}{\mu} \right)$ dans le cas solaire pour

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ a = 0; 0,01; 0,1; 0,2 \\ \lambda = 5000 \text{ Å.} \end{cases}$$

16. *Raies moléculaires*. — Il est possible de construire une courbe de croissance. Les raies moléculaires étant assez faibles, nous prendrons $a = 0$ et $\omega = 1$.

On peut écrire, avec MINNAERT [12]

$$(54) \quad b(\tau) = \frac{C_1}{k_H} \left[\log p + \frac{\varphi}{T} - 2 \log T \right] = \frac{C_1}{k_H} \psi(\varphi, \tau)$$

la fonction $\psi(\varphi, \tau)$ étant tabulée [12] dans le cas solaire. Pour une molécule AB, on a :

$$(55) \quad C_1 = \frac{A_A A_B}{10^A} \frac{1}{m} \frac{(2I'' + 1) 2(2\Lambda + 1)(2\Sigma + 1)}{Z_{4500}} (4500)^{3,2}$$

où J'' désigne le nombre quantique de rotation.

m un facteur qui doit être introduit pour tenir compte de la subdivision en branches PQR des transitions issues du niveau considéré.

A_A et A_B les teneurs (en nombre d'atomes A et B par atome d'hydrogène).

De plus φ désigne l'expression $\varphi = B - 0.625 F''$ où F'' est le terme de rotation.

A et B sont les constantes de l'équation de dissociation de la molécule AB, telle que l'a introduite RUSSELL [25].

On aura :

$$(56) \quad x = C_2 \frac{1}{\mu} \int_0^\tau \frac{\psi(\varphi, \tau) d\tau}{\sqrt{T} k_H(\tau)}$$

$$(57) \quad C_2 = C_1 f \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2}{mc} \sqrt{\frac{\mu m_0}{2k}}$$

Nous aurons alors :

$$(58) \quad \log w(0, \mu) = \log C_1 f + \log \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} h(\bar{\tau}) \psi(\varphi, \bar{\tau}) \Psi(x(\bar{\tau}), 0, 1) d\bar{\tau} + \log \frac{\lambda_0^2}{c} \frac{\pi e^2}{mc}$$

si on introduit, comme MINNAERT, la fonction $h(\bar{\tau}) = \frac{g}{x}(\bar{\tau}) \frac{x}{x}$. Cette courbe a été construite en fonction de $\log C_2$ pour plusieurs valeurs de φ , pour $\mu = 1$, pour $\lambda = 5\,000 \text{ \AA}$, en utilisant les tables de la fonction h publiées antérieurement par MINNAERT [12] et par l'auteur [18].

II) L'abondance du carbone dans l'atmosphère solaire.

17. — Le réseau de courbes de croissance tracées pour CH va nous permettre d'étudier l'abondance du carbone d'une façon plus rigoureuse que HUNAERTS (qui utilise l'approximation SCHUSTER-SCHWARZSCHILD) [8]. Le tableau 2 rassemble les données et les calculs relatifs aux raies de CH mesurées par HUNAERTS dans l'atlas d'Utrecht [13].

En admettant une valeur moyenne de f égale à $4.5 \cdot 10^{-4}$ [8] on trouve :

$$A_c = [\bar{3}, 90] = 0.0079$$

valeur nettement plus forte que celle de HUNAERTS qui trouve :

$$A_c = [\bar{3}, 06] = 0.0012.$$

TABLEAU 2

N°	$2J''+1$	m	F''_{cm-1}	φ	$\text{Log } \frac{C_2}{A_f}$	$w_{m\text{\AA}}$	$\text{Log } C_2$	A_f	f
1	14	7.08	778.9	17 808	18.97	35	23.40	$2.69 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
2	14	6.92	780.7	17 807	98	49	65	4.68	5.9
3	18	6.17	1 254.4	17 511	17.01	44	65	4.37	5.5
4	18	6.17	1 254.4	17 511	01	42	61	3.98	5.1
5	18	6.03	1 256.0	17 510	05	43	61	2.95	3.7
6	22	5.62	1 838	17 146	26	68	22.08	6.61	8.4
7	22	5.62	1 838	17 146	26	56	23.88	4.17	5.3
8	28	5.25	2 906	16 479	40	40	75	2.24	2.8
9	30	5.10	3 312	16 225	45	35	71	1.82	2.3
10	32	5.01	3 742	15 956	48	45	22.01	3.39	4.3
11	32	5.01	3 742	15 956	48	48	01	4.07	5.2
12	40	4.79	5 692	14 737	59	38	12	3.39	4.3
13	42	4.68	6 233	14 399	62	25	23.72	1.26	1.6
14	52	4.57	9 228	12 527	73	12	70	0.93	1.2
15	56	4.47	10 543	11 706	77	13	90	1.35	1.7
16	68	4.37	14 790	9 051	86	10	22.18	2.09	2.7
17	14	2.69	778.9	17 808	17.39	56	23.77	2.40	3.0
18	16	2.82	1 004.8	17 667	43	68	96	3.39	4.3
19	18	2.88	1 256.0	17 510	47	62	99	3.39	4.3
20	20	2.95	1 532.6	17 337	50	81	22.25	5.62	7.1
21	20	2.95	1 534.0	17 336	50	68	12	4.17	5.3
22	24	3.24	2 906	16 479	54	57	12	3.80	4.8
23	30	3.24	3 312	16 225	64	61	17	3.39	4.3
24	32	3.24	3 742	15 956	67	77	50	6.76	8.6
25	34	3.31	4 196	15 672	68	62	44	5.76	7.3

$$2(2\Lambda + 1)(2\Sigma + 1) = 12$$

$$Z_{4\ 500} = 4\ 671$$

$$A = 1.05 \cdot 10^7$$

$$B = 18\ 300$$

$$\lambda_0 = 4\ 260 \text{ \AA}$$

$$A_A = A_C; A_B = A_H = 1$$

Constantes du calcul selon [8] et [17]

Les raies 1 à 16 sont des raies P } appartenant à la
17 à 25 R }

transition $^2\Delta-^2\Pi$ (bande 0.0).

Si l'on part de cette valeur de A_c on trouve une répartition des valeurs de f qui semble être systématique (fig. 4) : on en déduit (tableau 2) une valeur de f pour chaque valeur de J'' dans la bande considérée.

La grande différence entre le résultat d'HUNAERTS et le nôtre est peut-être due à l'utilisation que nous avons faite d'un modèle trop chaud : nous ne le croyons cependant pas, car les fonctions de poids dépendent peu de la valeur absolue de

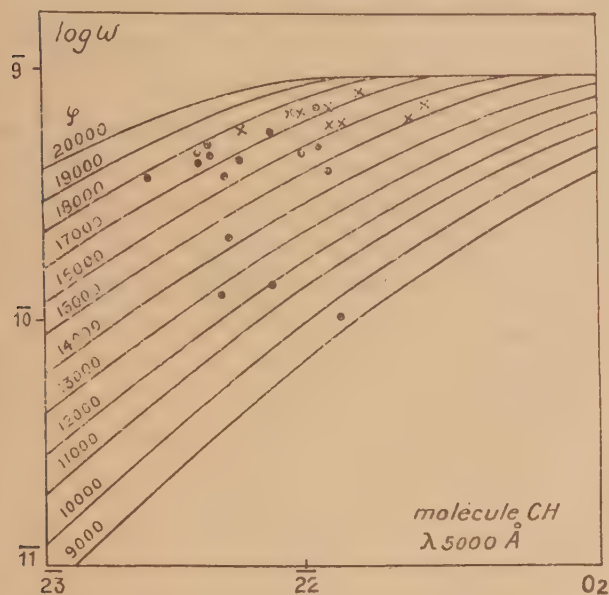


FIG. 3.

FIG. 3. — Détermination de l'abondance de carbone dans la photosphère solaire.

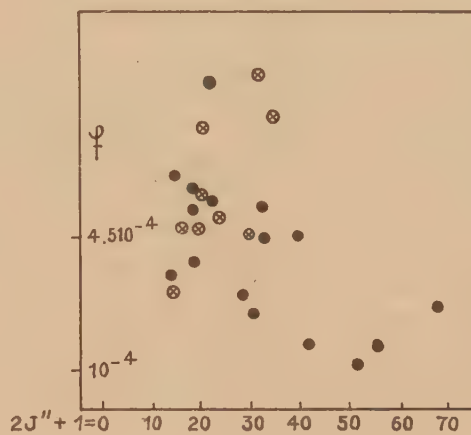


FIG. 4.

FIG. 4. — Forces d'oscillateur dans une bande de C_2 .

la température mais surtout du gradient de température, et même dans ce cas, assez peu.

III. Interprétation des mesures d'assombrissement.

18. — Dans la formation d'une raie, nous pouvons considérer que deux sortes de grandeurs jouent un rôle :

- a) celles qui sont liées au modèle ;
- b) celles qui sont liées à l'atome absorbant (processus d'absorption...).

La valeur d'une raie au centre du disque peut — on l'a vu — à condition de connaître le modèle, permettre d'atteindre le produit de l'abondance par la force d'oscillateur : Af ; si on connaît f pour une raie de l'atome considéré, on en déduit donc A , puis on peut en déduire f pour d'autres raies de cet atome.

Mais elle ne peut donner de renseignements ni sur le *modèle* ni sur le processus de *formation* (absorption, diffusion...) pour la connaissance desquels on est obligé d'avoir recours aux *mesures d'assombrissement*.

Prenons, pour nous en rendre compte, l'exemple simple des raies de Swan de C_2 dont nous avons publié antérieurement (en collaboration avec C. PECKER) [19], de s

observations détaillées entre le centre et le bord du disque solaire. Nous étions arrivés à la conclusion que ces raies sont formées par diffusion pure (fig. 3 du mémoire cité). Mais le modèle utilisé (MINNAERT [12]) n'est sans doute pas valable car il est déduit de mesures de l'assombrissement continu, mesures non corrigées de l'effet de « roughening » (rugosité) proposé par REDMAN et par ailleurs imparfaites. Notre conclusion de « diffusion pure » étant liée non seulement au modèle, mais encore au calcul de la fonction de poids g_2 (de diffusion) que nous savons erroné (Appendice 2), il convient donc de discuter à nouveau cette conclusion.

Suivant une communication personnelle d'A. UNSÖLD, il faudrait admettre que les raies moléculaires sont formées par *absorption pure*, en raison du grand nombre de niveaux d'énergie et de la complexité de leur structure. Dans cette hypothèse, en admettant que la fonction-source a la forme :

$$(59) \quad \frac{S(\tau)}{I(0, 1)} = A + B\tau$$

et l'assombrissement la forme

$$(60) \quad \frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = A + B\mu.$$

On a :

$$A + B = 1.$$

En posant de plus $n = \text{constante}$, ce qui n'entraîne aucune erreur sensible sur l'assombrissement théorique [17], nous pourrions donc, pour plusieurs valeurs de B tracer les courbes d'assombrissement pour $\lambda = 5\,000 \text{ \AA}$ et les comparer à la courbe expérimentale.

On est conduit à la valeur suivante (fig. 5 A) :

$$A = 0.3 \quad B = 0.7$$

ce qui correspond à un modèle *plus chaud* que le modèle classique. On s'attendrait, pour bien des raisons, à un modèle plus froid (nous reviendrons sur ce problème au chapitre suivant et nous essayerons de conclure).

Si nous admettons au contraire la diffusion pure, aucune coïncidence ne demeure possible (fig. 5 B).

Dans le cadre du modèle actuel de la photosphère ($A = 0.26$ pour $\lambda = 5\,000 \text{ \AA}$) solaire (MINNAERT [12]), la courbe expérimentale est située entre les courbes correspondant à l'absorption pure et à la diffusion pure. Dans le cadre d'un modèle plus froid, tel que l'on peut l'imaginer actuellement avec raison (voir chapitre suivant), la disposition relative des courbes est la même ($A = 0.17$ pour $\lambda = 5\,000 \text{ \AA}$ [fig. 5 C et D]).

Or pour admettre un modèle avec « absorption + diffusion », il faudrait logiquement que le rôle de la diffusion soit plus important à la surface et moins en

profondeur (voir par exemple [30]), donc que la courbe expérimentale d'assombrissement s'approche de la courbe « diffusion » au bord et de la courbe « absorption » au centre du disque solaire. Il semble qu'avec nos nouvelles courbes de diffusion,

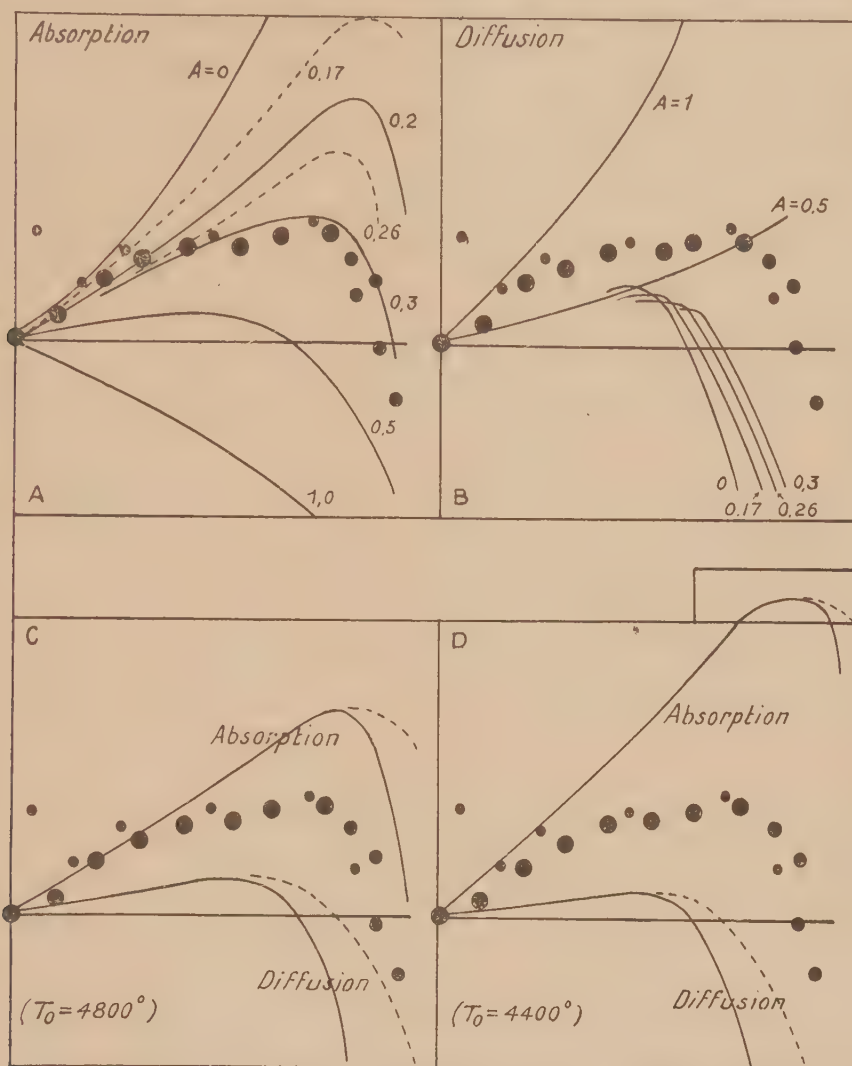


FIG. 5. — *Interprétation des mesures d'assombrissement des raies 5104,4 et 5132,7 de la molécule C₂.*

Les mesures sont comparées dans la figure A, à différentes courbes correspondant à des modèles différents dans le cas du processus d'absorption, dans la figure B à différentes courbes calculées avec le processus de diffusion, dans les figures C et D aux courbes diffusion et absorption corrigées (pointillé) ou non (trait plein) de l'effet de rugosité (roughening) pour deux modèles possibles de la photosphère.

il en soit bien ainsi, contrairement à ce que nous avons pu conclure de notre étude antérieure et surtout si l'on applique aux courbes théoriques la correction de « roughening » $\cos \theta_{\text{calc}} - \cos \theta_{\text{obs}}$, correction qui tient compte du relief solaire et sur laquelle nous reviendrons au chapitre suivant.

En résumé, nous ne pouvons conclure sur le modèle. Mais quel que soit

celui-ci, nous pouvons conclure en tous cas que l'absorption pure ne suffit pas (non plus que la diffusion pure d'ailleurs) à expliquer ce phénomène. Il faut admettre une combinaison de ces deux processus de formation des raies.

C) GÉNÉRALISATION A DIFFÉRENTS CAS COMPLEXES DE DIFFUSION

19. *Diffusion par les électrons libres. Raies d'émission.* — Nous ne referons pas en détail les calculs du § 6. Les fonctions-sources ont ici la forme :

$$(61) \quad S_v = \frac{\sigma_v}{\kappa_v + \sigma_v + \kappa + \sigma} I_v + \frac{\eta \kappa_v + \kappa}{\kappa + \sigma + \kappa_v + \sigma_v} B + \frac{\sigma}{\kappa + \sigma + \kappa_v + \sigma_v} \mathcal{J}(\bar{I}_v, \mu)$$

$$(62) \quad S = \frac{\kappa}{\kappa + \sigma} B + \frac{\sigma}{\kappa + \sigma} \mathcal{J}(\bar{I}, \mu).$$

A l'expression de $r_{\pm}$ calculée au § 6, nous serons obligés d'ajouter le terme suivant :

$$f_{\pm} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} [\mathcal{J}(\bar{I}, \mu) - \mathcal{J}(\bar{I}_v, \mu)] e^{-(\tau' + s')/\mu} e^{[(\tau_v - \tau'_v) + (s_v - s'_v)]/\mu} \frac{ds'}{\mu}}{\int_0^{\infty} S e^{-(\tau' + s')/\mu} d(\tau' + s')}$$

De plus, dans les intégrales des formules (19) et (20), il faudra remplacer la fonction B par la fonction :

$$B + \frac{\sigma}{\kappa} \mathcal{J}(\bar{I}, \mu) = \left(1 + \frac{\sigma}{\kappa}\right) S$$

et dans les numérateurs de ces mêmes formules, τ' par $\tau' + s'$. La fonction $\mathcal{J}(\bar{I}, \mu)$ peut en général être assimilée à $\bar{I}$ (diffusion isotrope).

On voit, en utilisant les conclusions du paragraphe précédent, que :

a) dans le cas des raies *faibles*, le terme complémentaire est nul, car $\bar{I}_v = \bar{I}$;

b) dans le cas des raies *fortes*, le terme complémentaire a le signe de $\bar{I} - B$. Nous avons vu dans le chapitre précédent sur l'exemple d'une étoile B que cette quantité peut être négative du côté « violet » des discontinuités (régions opaques).

De plus, le premier terme de l'expression de $r_{\pm}$ est positif et d'autant plus petit que l'expression

$$\frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} S e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \eta S e^{-\tau/\mu}$$

est petite.

Si $\eta = 1$ (cas général), ce terme équivaut à : $\mu e^{-\tau/\mu} \frac{dB}{d\tau} (\tau' = 0) + \dots$. Il sera d'autant plus petit que $\frac{dB}{d\tau}$ (c'est-à-dire une quantité qui varie dans le même sens

que le gradient de température) sera plus faible. Dans les régions opaques, ce terme sera donc assez faible.

Donc, dans les régions opaques du spectre (côté violet des discontinuités), la diffusion par les électrons libres peut entraîner une valeur négative pour $r_{\pm}$, ce qui correspond à l'apparition d'une raie en émission.

Cette conclusion rejoint celle que A. B. UNDERHILL [28] a obtenu récemment, de façon assez différente, pour la quantité $R_{\pm}$.

On pourrait donc voir dans ce fait l'origine du spectre des étoiles chaudes à raies d'émission : une étude intéressante serait l'examen systématique des spectres des étoiles B_e et O_e afin de déceler une différence de comportement entre les régions violette et rouge du spectre : on sait que fréquemment les raies H_{α} , H_{β} apparaissent en émission, tandis que H_{δ} apparaît en absorption.

Notons que ce processus de formation des raies d'émission ne fait nullement appel à des écarts à l'équilibre thermodynamique, écarts que l'on rend généralement responsables des spectres des étoiles O_e et B_e [32].

Dans le mémoire [28] de A. B. UNDERHILL, l'auteur signale que les raies formées par *diffusion* ne peuvent pas apparaître en émission, comme celles qui sont formées par *absorption*. Ce fait n'est pas mis en évidence dans notre calcul. Il semble même que les raies de diffusion aient en général la possibilité d'apparaître en émission — au bord du disque — sans qu'il y ait même de diffusion par les électrons libres : les fonctions de poids g_2 calculées dans le cas solaire [18] deviennent négatives au bord du disque, tandis que les fonctions g_1 restent positives (voir aussi MÜNCH [14]).

20. *Diffusion non isotrope dans la raie.* — Il est facile de voir que si $\sigma_v \bar{I}_v$ est remplacé dans S_v par $\sigma_v \varphi(\bar{I}_v, \mu)$ cela revient à remplacer dans g_2 , $\bar{I}_v$ par $\varphi(\bar{I}_v, \mu)$.

On voit alors que dans le cas des raies faibles, ou des ailes des raies fortes, il faudra écrire :

$$(64) \quad g_2 = \frac{\frac{1}{\mu} \int_{\tau'}^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \varphi(\bar{I}, \mu) e^{-\tau/\mu}}{\int_0^{\infty} B_v e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

tandis que dans les raies fortes, on a :

$$(65) \quad \bar{I}_v \cong S_v = \frac{\sigma_v}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} \varphi(\bar{I}_v, \mu) + \frac{\eta \kappa_v + \kappa}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} B$$

équation d'où l'on tire $\bar{I}_v$ en fonction de B et μ et par suite g_2 . On voit qu'un tel calcul sera possible sans difficultés trop grandes avec les mêmes approximations que celles que nous avons été contraints de faire dans le cas de la diffusion isotrope (Appendice 2). Cependant, dans la pratique, on sait que la diffusion isotrope donne sensiblement les mêmes résultats.

Il pourrait être intéressant, pour approfondir les idées de ZANSTRA [33], de calculer la polarisation au centre de certaines raies fortes : il suffirait de faire le calcul pour chaque composante de l'intensité et d'utiliser les deux fonctions $\varphi_i(\bar{I}_\nu, K_\nu)$ et $\varphi_r(\bar{I}_\nu, K_\nu)$ que CHANDRASEKHAR [3] a calculées et que nous avons utilisées dans l'étude de la polarisation par les électrons libres (voir TS II).

21. *Diffusion non cohérente.* — L'importance de la diffusion non cohérente a été souvent remarquée [11, 7, 14]. Son introduction dans l'équation de transfert a été faite de façon fort différente par les différents auteurs. Nous ne choisirons pas entre les différentes méthodes et nous nous contenterons de montrer qu'elles peuvent toutes rentrer dans le cadre de notre méthode de calcul des raies d'absorption.

a) HOUTGAST [7] introduit dans l'équation de transfert un coefficient d'extinction l_ν sous la forme :

$$(66) \quad -\mu \frac{dI_\nu}{\rho dx} = (\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu + l_\nu)I_\nu - \sigma_\nu \bar{I}_\nu - (\eta\kappa_\nu + \kappa)B.$$

Nous voyons immédiatement sans refaire les calculs que nous serons obligés de définir alors une fonction de poids d'extinction :

$$(67) \quad g_{+3} = \frac{1}{\mu} \frac{\int_{\tau'}^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau'}{\int_0^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

$$(68) \quad g_{-3} = -\frac{1}{\mu} \frac{\int_0^{\tau} B e^{-\tau'/\mu} d\tau'}{\int_0^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau'}$$

qui entrera dans les calculs de la même façon que $g_{\pm 1}$ et $g_{\pm 2}$.

b) MÜNCH [14] écrit l'équation de transfert sous la forme suivante (écrite en utilisant nos notations) :

$$(69) \quad -\mu \frac{dI_\nu}{\rho dx} = (\kappa + \kappa_\nu + \sigma'_\nu)I_\nu - \sigma'_\nu \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \gamma_c} \bar{I}_\nu - \sigma'_\nu \frac{\gamma_c}{\gamma_n + \gamma_c} \bar{J} - (\eta\kappa_\nu + \kappa)B$$

avec

$$(70) \quad \bar{J} = \frac{\int_0^{\infty} \sigma'_\nu \bar{I}_\nu d\nu}{\int_0^{\infty} \sigma'_\nu d\nu}$$

(dans le cas des raies faibles, on a $\bar{I}_\nu = \bar{I}$ et $\bar{J} = \bar{I}$)

Nous aurons alors :

$$(71) \quad g_{\pm 3} = \frac{\pm \frac{1}{\mu} \int_{\alpha'}^{\beta} B e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \bar{J} e^{-\tau'/\mu}}{\int_0^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau'}.$$

A condition de remplacer σ'_ν par $\sigma_\nu + l_\nu$ où

$$(72) \quad \begin{cases} l_\nu = \sigma'_\nu \frac{\gamma_c}{\gamma_n + \gamma_c} \\ \sigma_\nu = \sigma'_\nu \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \gamma_c}, \end{cases}$$

on voit que l'expression de MÜNCH ne diffère de celle de HOUTGAST que par le terme $l_\nu \bar{J}$: en effet HOUTGAST suppose implicitement que le rayonnement de fréquence ν peut être diffusé à une fréquence ν' ou ν'' ... mais ne tient pas compte, comme MÜNCH, du fait que les rayonnements de fréquence ν' , ν'' ... peuvent être diffusés à la fréquence ν .

Remarquons que, au contraire de $\bar{I}_\nu$, $\bar{J}$ ne dépend pas de la longueur d'onde de la raie : la fonction $g_{\pm 3}$ pourra donc être calculée sans difficultés de principe, mais il faudra cependant évaluer $\bar{J}$, ce qui présente certaines difficultés de calcul.

D) RAIES SPECTRALES DU DISQUE TOTAL DE L'ÉTOILE

22. — Dans le cas où l'on observe le rayonnement total du disque stellaire, les grandeurs dont le calcul est intéressant sont

$$(73) \quad R_\nu = \frac{F - F_\nu}{F}$$

et

$$(74) \quad W(\tau, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F - F_\nu}{F} d\lambda.$$

Un calcul analogue à celui que nous avons fait au § 6 ne serait pas possible. En effet, une relation analogue à l'équation 9 peut être écrite, mais l'exponentielle y serait remplacée par une fonction intégral-exponentielle, comme il est bien connu.

Ces fonctions n'ayant pas la propriété fonctionnelle caractéristique des exponentielles :

$$(75) \quad f(x + y) = f(x) f(y)$$

il nous est impossible d'utiliser la transformation algébrique que nous avons pu utiliser alors.

Nous procéderons donc de la façon suivante :

a) calcul de R .

Il est d'abord nécessaire de calculer τ_ν et s_ν en fonction de τ . Connaissant alors la fonction-source en fonction de τ donc de τ_ν et s_ν , il sera possible de calculer $r(\mu)$ puis d'intégrer sur la variable μ ; mais le plus simple sera d'utiliser le calcul du flux que nous avons rappelé (TS I) en se servant de la formule approchée proposée par B. STRÖMGREN [27].

$$(76) \quad F_\nu(\tau_\nu) = h_1 S_\nu [\tau_1(\tau)] + h_2 S_\nu [\tau_2(\tau)] + \dots$$

En appliquant cette relation en plusieurs points de la raie, on obtiendra le contour de la raie.

b) calcul de $W(\tau, \theta)$.

On a :

$$(77) \quad \frac{F - F_v}{F} = \int_{-1}^{+1} \frac{I - I_v}{I} \frac{I}{F} \mu d\mu = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{I}{F} r_v(\mu) \mu d\mu.$$

En écrivant :

$$(78) \quad R_v = \int_{-1}^{+1} r_v(\tau, \mu) \frac{I(\tau, \mu) \mu}{\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \mu d\mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} r_v(\tau, \mu) \gamma(\tau, \mu) d\mu.$$

On peut intégrer par rapport à la variable λ et écrire :

$$(79) \quad W(\tau) = \int_{-1}^{+1} w(\tau, \mu) \gamma(\tau, \mu) d\mu$$

où γ désigne une « fonction d'assombrissement » dont l'expression est la suivante,

$$(80) \quad \text{si } \mu > 0 \quad \gamma_+(\tau, \mu) = \frac{\int_{\tau}^{\infty} B e^{(\tau-\tau')/\mu} d\tau'}{\int_{\tau}^{\infty} BK_2(\tau' - \tau) d\tau' - \int_0^{\tau} BK_2(\tau - \tau') d\tau' - \int_0^{\tau} B e^{(\tau-\tau')\mu} d\tau'}$$

$$(81) \quad \text{si } \mu < 0 \quad \gamma_-(\tau, \mu) = \frac{\int_{\tau}^{\infty} BK_2(\tau' - \tau) d\tau' - \int_0^{\tau} BK_2(\tau - \tau') d\tau'}{\int_{\tau}^{\infty} B e^{(\tau-\tau')/\mu} d\tau'}$$

Comme les fonctions de poids et la fonction de saturation, la fonction γ d'assombrissement est tabulable a priori pour une atmosphère déterminée.

23. *Fonctions de poids pour le calcul des raies dans le spectre du disque total.* — Le problème qui se pose maintenant est une fois de plus de rendre possible un calcul de W sans qu'il soit nécessaire de faire successivement deux intégrations (par rapport à τ pour obtenir $w(\tau, \mu)$, puis par rapport à μ pour obtenir $W(\tau)$) mais une seule. Dans ce but, nous intervertirons l'ordre des deux intégrations.

Écrivons, en utilisant l'équation (33)

$$(82) \quad W(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2 f \lambda_0^2}{mc} \frac{1}{c} \left[\int_0^{\tau} \left[\int_{\tau}^{\infty} g_+ f_+ \gamma_+ \Psi(x-a) b(\tau') d\tau' \right] d\mu + \int_{-1}^0 \left[\int_0^{\tau} g_- f_- \gamma_- \Psi(x-a) b d\tau' \right] d\mu \right].$$

Les expressions $gf\gamma$ ont une forme analytique particulière.

$$(83) \quad g_+ f_+ \gamma_+ = \frac{2}{F(\tau)} e^{(\tau-\tau')/\mu} \varphi_+(\tau', \mu)$$

$$(84) \quad \text{où } \varphi_+ = \frac{e^{\tau'/\mu}}{\mu} \int_{\tau'}^{\infty} B e^{-t/\mu} dt - \eta B(\tau')$$

$$(85) \quad g_- f_- \gamma_- = -\frac{2}{F(\tau)} e^{-(\tau-\tau')/\mu'} \varphi_-(\tau', \mu') \quad \text{où } \varphi_- = \frac{e^{-\tau'/\mu'}}{\mu'} \int_0^{\tau} B e^{+t/\mu'} dt - \eta B(\tau')$$

soit $\varphi_- = \varphi_+ - \frac{I(0, -\mu')}{I(0, 1)} e^{-\tau/\mu'}$ (si l'on pose $\mu' = -\mu$ de façon à ce que $\mu' > 0$ dans le domaine considéré d'intégration).

Si on admet que Ψ varie peu avec μ (en réalité, dans le cas le plus défavorable, des raies fortes, Ψ varie comme $\sqrt{\mu}$), on peut écrire une formule d'approximation valable en toute rigueur si $\frac{\varphi\Psi}{\mu}$ est une fonction linéaire de μ et suffisamment bonne si $\frac{\varphi\Psi}{\mu}$ ne s'écarte pas trop d'une telle fonction : posons en effet

$$(86) \quad \int_0^1 e^{u/\mu} \mathcal{P}(\mu) d\mu = \alpha \mathcal{P}(\bar{\mu}) e^{u/\bar{\mu}} \quad \left. \vphantom{\int_0^1} \right\} u' = -u$$

$$(87) \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 e^{u/\mu} \mathcal{P}(\mu) d\mu = \int_0^1 e^{u'/\mu'} \mathcal{P}(\mu') d\mu' \quad \left. \vphantom{\int_{-1}^0} \right\} \mu' = -\mu.$$

Si l'on applique ces équations à $\mathcal{P}(\mu) = \mu$ et $\mathcal{P}(\mu) = \mu^2$ on trouve

$$(88) \quad \bar{\mu} = \frac{K_4(u)}{K_3(u)} \quad \bar{\mu}' = \frac{K_4(u')}{K_3(u')} \quad \text{soit} \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}' = \frac{K_4(u)}{K_3(u)}$$

$$(89) \quad \alpha e^{u/\bar{\mu}} = \frac{K_3}{K_4} K_3 = \alpha' e^{u'/\bar{\mu}'}.$$

En intervertissant alors dans (82) l'ordre des intégrations par rapport à τ' et μ , on obtient donc, en utilisant les formules d'intégration ci-dessus :

$$(90) \quad W(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2}{mc} \frac{f \lambda_0^2}{c} \left[\int_{\tau}^{\infty} b(\tau') \Psi[x_+(\tau', \tau, \mu), a] G_+(\tau' \tau) d\tau' \right. \\ \left. - \int_0^{\tau} b(\tau') \Psi[x_-(\tau', \tau, \bar{\mu}'), a] G_-(\tau' \tau) d\tau' \right. \\ \left. + \int_0^{\tau} b(\tau') \Psi[x(\tau', \tau, \mu'^*), a] \frac{2I(0, -\mu'^*)}{F(\tau)} \frac{K_3(\tau)}{\mu'^*} d\tau' \right]$$

où les fonctions de poids G_+ et G_- ont l'expression :

$$(91) \quad G_+(\tau', \tau, \bar{\mu}) = \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{2 K_3(|\tau - \tau'|)}{F(\tau)} \varphi_+(\tau', \bar{\mu})$$

$$(92) \quad G_-(\tau', \tau, \bar{\mu}') = \frac{1}{\bar{\mu}'} \frac{2 K_3(|\tau - \tau'|)}{F(\tau)} \varphi_+(\tau', \mu')$$

$$(93) \quad \mu = \bar{\mu}' = \frac{K_4(|\tau' - \tau|)}{K_3(|\tau' - \tau|)}$$

$$(94) \quad \mu'^* = \frac{K_4(\tau)}{K_3(\tau)}$$

$$(95) \quad \text{avec} \quad \varphi_+ = \frac{e^{\tau/\mu}}{\mu} \int_{\tau'}^{\infty} B e^{-\tau'/\mu} d\tau' - \eta B(\tau').$$

Dans le cas où l'on s'intéresse seulement au rayonnement sortant, on a :

$$(96) \quad W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2}{mc} \frac{f \lambda_0^2}{c} \int_0^{\infty} b(\tau') G(\tau', \bar{\mu}) \Psi[x(\tau', \bar{\mu})a] d\tau'.$$

G s'identifie exactement avec la fonction proposée par UNSÖLD [29] à condition d'y faire :

$$\varphi(\tau', \mu) = \beta_0 \mu.$$

Toutefois UNSÖLD et KURZ [31] ont publié récemment une nouvelle expression de G : il semble que cette dernière soit meilleure que la nôtre : toutefois, nous aurions pu utiliser une meilleure formule d'intégration que la formule (86), en particulier en supposant B développé en puissances de τ , comme UNSÖLD. De plus, nous devons remarquer que la nouvelle formule d'UNSÖLD n'est pas valable pour les raies fortes.

Une application de ces formules au calcul de $W(\tau)$ dans le soleil pour l'évaluation du blanketing effect est donnée dans le chapitre suivant.

Nous avons dû renoncer à donner comme exemple la détermination du type spectral des étoiles B₁ et B_{1.5} étudiées dans TS III : en effet, notre méthode, qui s'appliquait parfaitement, s'est heurtée à l'incertitude sur les valeurs des forces d'oscillateur de Si III. Cette incertitude entraîne une incertitude de 3 types spectraux (types compris entre B0 et B3 !) Nous devons donc, pour calculer des types spectraux, utiliser de préférence les données du spectre continu, ou calculer les forces d'oscillateur nécessaires par les méthodes de la mécanique ondulatoire (voir par exemple BATES-DAMGAARD [1]).

E) TECHNIQUE DU CALCUL DES RAIES

24. *Difficultés de calcul.* — Dans ce qui précède, nous avons donné plusieurs exemples sans entrer dans le détail précis des calculs.

Nous voudrions revenir maintenant sur certaines difficultés de ces calculs, difficultés qui se posent dans les intégrations, en raison des valeurs infinies que peuvent prendre les fonctions intégrées. Ces difficultés sont les suivantes :

a) Au voisinage de la valeur $\tau' - \tau = 0$, et dans le cas des raies fortes, x varie entre des valeurs très petites qui pour $\tau' - \tau \cong 0$ donnent à Ψ la valeur 1 et des valeurs plus grandes qui donnent à Ψ la valeur $\sqrt{\frac{a\sqrt{\pi}}{x}}$.

Donc, au voisinage de $\tau' - \tau = 0$, Ψ varie énormément et il est nécessaire de calculer la valeur de la fonction à intégrer en un grand nombre de points autour de $\tau' - \tau = 0$.

On aura alors :

$$(97) \quad x \cong \frac{|\tau - \tau'|}{\mu} b k_0(\tau) \quad \text{pourvu que } \tau' \text{ reste assez voisin de } \tau.$$

Or, b et g ont des valeurs variant lentement autour de $\tau = 0$. On pourra donc écrire :

$$(98) \quad W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2}{mc} \left[f \frac{\lambda_0^2}{c} b(\tau) g_{\pm}(\tau) f_{\pm}(\tau) \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Psi(x) d\tau' + \int_{\tau+\Delta\tau}^{\infty} f \frac{\lambda_0^2}{c} b g_{\pm} f_{\pm} \sqrt{\frac{a\sqrt{\pi}}{x}} d\tau' \right],$$

si $(\tau + \Delta\tau)$ est une valeur connue telle que pour $\tau' > \tau + \Delta\tau$ on ait

$$\Psi(x) \cong \sqrt{\frac{a\sqrt{\pi}}{x}}.$$

Or

$$(99) \quad \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Psi(x) d\tau' = \int_0^u \Psi \left[\frac{ubk_0}{\mu}, a \right] du = \frac{\mu}{bk_0} \int_0^{X_l = \frac{bk_0}{\mu} u_l} \Psi[x, a] dX$$

fonction tabulable à priori en fonction de X_l et du paramètre a .

b) Au voisinage de la valeur $\tau = 0$, les difficultés peuvent aussi venir de b .

En effet, on a :

$$(100) \quad b \cong \frac{n}{k_H}$$

$$(101) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{k_H} \sim \frac{1}{p_e} \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

Si n n'est pas nul, b est donc infini pour $\tau = 0$. Mais, puisque n et g restent finis, le produit $bg\Psi$ équivaut alors à $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ et par suite, l'intégrale w est finie et la difficulté est levée.

25. *Marche du calcul.* — Les opérations qu'il est nécessaire d'effectuer sont résumées dans le tableau 3, dans l'ordre dans lequel il faut les effectuer.

APPENDICE 1

COEFFICIENT ATOMIQUE D'ABSORPTION

a) Nous définirons le coefficient d'absorption *par particule* (atome ou molécule) du corps considéré par l'expression bien connue :

$$(102) \quad k_v(T) = k_0(T) \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-v^2} dy}{a + (v - y)^2} = k_0(T) H(a, v).$$

La fonction $H(a, v)$ a été tabulée par HJERTING [6] et D. HARRIS III [5] dans d'assez larges limites pour un nombre suffisant de valeurs des paramètres a et v .

b) On sait que a est le rapport de la constante d'amortissement à l'élargissement DOPPLER.

Nous écrirons a de la façon suivante (voir par exemple [26]) :

$$(103) \quad a = \frac{\delta'}{b^{(v)}}$$

$$(104) \quad \delta' = \delta + \frac{S}{4\pi} \quad \text{constante d'amortissement effective.}$$

$$(105) \quad b^{(v)} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{2kT}{\bar{\mu} m_0}} \quad \text{élargissement Doppler.}$$

La constante δ d'amortissement de rayonnement a en théorie classique l'expression :

$$(106) \quad \delta = \frac{4\pi}{0.220} \frac{1}{\lambda_0^2}.$$

On a pour la valeur du nombre de collisions par unité de temps :

$$(107) \quad S = N_b \pi \sigma^2 \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k}{m_0} T \left(\frac{1}{\bar{\mu}_1} + \frac{1}{\bar{\mu}_2} \right)}$$

où $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ représentent les masses atomiques des atomes entrant en collision (en pratique l'atome du métal considéré et un atome d'hydrogène).

De plus, on a

$$(108) \quad \sigma = \left[\frac{3\pi^2}{4} \frac{C}{v} \right]^{1/5} \quad \text{rayon de la section de choc effective des collisions.}$$

$$(109) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{\bar{\mu} m_0}} \quad \text{vitesse moyenne des atomes entrant en collision}$$

(110) C constante de VAN DER WAALS, caractérisant l'énergie d'interaction des 2 atomes en question ; calculable par plusieurs procédés [26], [30], [1].

$$(111) \quad N_b = \frac{p}{kT} \quad \text{nombre d'atomes rencontrés par unité de volume.}$$

En définitive, a pourra s'écrire :

$$(112) \quad a = 2.071 \cdot 10^{14} \alpha_1 p T^{-1.2} + 1.363 \cdot 10^{-6} \alpha_2 T^{-0.5}$$

$$(113) \quad \text{où} \quad \alpha_1 = C^{0.4} \bar{\mu}_1^{-0.7} \left[\frac{1}{\bar{\mu}_1} + \frac{1}{\bar{\mu}_2} \right]^{0.5} \lambda_0$$

$$(114) \quad \alpha_2 = \bar{\mu}_1^{0.5} \lambda_0^{-1}.$$

On se reportera aux travaux de RUDKJØBING pour l'étude de la validité de ces formules [24].

c) Les grandeurs v et H ont les expressions suivantes :

$$(115) \quad v = \frac{v - v_0}{v_0} \frac{c \sqrt{\bar{\mu}_1 m_0}}{\sqrt{2kT}} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \frac{c \sqrt{\bar{\mu}_1 m_0}}{\sqrt{2kT}}$$

et dans les cas usuels :

$$(116) \quad H(a, v) = e^{-v^2} + \frac{2a}{\sqrt{\pi}} [2vF(v) - 1] + a^2 e^{-v^2} (1 - 2v^2) + \dots = \sum_{i=0} a^i h_i(v).$$

d) Si une vitesse *turbulente* ξ se superpose à la vitesse d'agitation thermique, on aura :

$$(117) \quad v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \frac{c}{\sqrt{\frac{2kT}{\mu_1 m_0} + \xi^2}}.$$

e) L'expression de $k_0(\tau)$ est également bien connue.

$$(118) \quad k_0(T) = \frac{k}{b^{(\lambda)} \sqrt{\pi}}$$

avec

$$(119) \quad b^{(\lambda)} = \frac{\lambda_0}{c} b^{(v)} = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0 \mu_1} + \xi^2}$$

$$(120) \quad k = \int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda d\lambda = \frac{\pi e^2}{mc} \frac{\lambda_0^2}{c} f$$

$$(121) \quad \text{d'où} \quad k_0(\tau) = \frac{c}{\lambda_0} \frac{k}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m_0 \mu_1} + \xi^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m_0 \mu_1} + \xi^2}}.$$

Si a est petit, $k_0(\tau)$ est le coefficient d'absorption au centre de la raie.

f) Rappelons enfin les formules permettant les changements de variables

$$(122) \quad d\lambda = -dv \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0 \mu_1}}$$

$$(123) \quad dv = -\frac{c}{\lambda_0^2} d\lambda \quad d\lambda = -\frac{\lambda_0^2}{c} dv.$$

APPENDICE 2

CALCUL DES FONCTIONS DE POIDS

a) Lorsqu'on connaît une forme analytique de $B(\tau)$, il est possible de calculer toutes les intégrales qui interviennent dans g , f , G ,.... C'est ce qui a été fait par MINNAERT [12] (qui a donné des formules permettant le calcul des fonctions de poids lorsque $B_v(\tau)$ est un polynôme de degré 4) et plus récemment par UNSÖLD et KÜRZ [31]. Mais la véritable difficulté réside dans les cas où la fonction de poids fait intervenir la fonction $\bar{I}_v$ (fonctions de poids de diffusion, ou terme complé-

mentaire de diffusion par les électrons libres). En effet, $\bar{I}_v$ est une fonction non plus seulement du fond continu, mais aussi du point du profil de la raie que l'on considère.

b) Dans le cas des raies *faibles*, c'est-à-dire dans le cas antérieurement étudié par UNSÖLD et MINNAERT, on peut écrire :

$$(124) \quad \bar{I}_v \cong \bar{I} = \Lambda \{ S \}$$

et le calcul de la fonction de poids peut être fait. Il en est de même dans le cas des *ails* des raies fortes.

c) Dans le cas des raies *fortes*, on peut toujours écrire :

$$(125) \quad \bar{I}_v = \Lambda \{ S_v \}.$$

Mais à de faibles profondeurs optiques continues correspondent (tout au moins dans les *parties centrales* de la raie) de grandes profondeurs optiques monochromatiques, pour lesquelles $\bar{I}_v = S_v$. On a donc :

$$(126) \quad \bar{I}_v(\tau) = \bar{I}_v(\tau_v) \cong S_v(\tau_v) = S_v(\tau).$$

Au voisinage immédiat de la surface, cette relation n'est plus valable mais alors nous pourrions écrire

$$(127) \quad \bar{I}_v(0) \cong \frac{1}{2} S_v(0) \quad (\text{figure 6, tableau 4}).$$

TABLEAU 4

τ	$\frac{B(\tau)}{I(0,1)}$	$\tau_v=10\tau$	$\frac{\bar{I}_v(\tau)}{I(0,1)}$	$\frac{\bar{I}_{ev}}{I(0,1)}$	$\frac{I_M}{I(0,1)}$	$\frac{\Delta I}{I_0}$	$-\Delta g_2$ ($\mu=1$)	$-\Delta g_2$ ($\mu=0,2$)	g_2 ($\mu=1$)	g_2 ($\mu=0,2$)
0	.259	0	.152	.326	.363	.037	.037	.530	.737	1.98
.001	.260	.01	.158	.327	.363	.036	.036	.513	.736	1.97
.01	.268	.1	.192	.336	.369	.033	.033	.450	.729	1.88
.02	.276	.2	.218	.345	.376	.031	.030	.402	.719	1.78
.05	.303	.5	.269	.370	.394	.024	.023	.268	.694	1.53
.1	.345	1.	.331	.409	.426	.017	.015	.147	.653	1.17
.2	.431	2.	.425	.486	.492	.006	.005	.032	.578	.700
.4	.598	4.	.596	.627	.628	.001	.001	.002	.454	.248
1.	1.065	10.	1.061	1.070	1.070				.216	.0110
1.8	1.62	18.	1.62	1.62	1.62				.131	.00138
2.6	2.08	26.	2.08	2.08	2.08				.0783	.00017
4	2.70	40.	2.70	2.70	2.70				.0266	.000002
									.00277	

(Pour $\lambda = 5\,040 \text{ \AA}$, on a tabulé pour plusieurs profondeurs optiques : 1) la fonction-source ; 2) les intensités moyennes en un point où $z_v = 10 z$ et dans le continu, en utilisant une formule exacte, ou la formule approchée de MINNAERT. Les erreurs commises sur la fonction de poids sont calculées en deux points du disque solaire ; et la valeur de cette fonction de poids — calculée à l'aide de la formule approchée de MINNAERT — est donnée pour ces deux points du disque solaire, selon [18].)

De toutes façons, on voit que nous pourrions remplacer, pour les *parties centrales* de la raie, la fonction de poids de diffusion, par la fonction de poids d'absorption. L'erreur faite sur le calcul de $\omega(\tau, \mu)$ en utilisant ainsi g_1 au lieu de g_2 ne sera pas

grande non plus car les parties de la raie où le coefficient d'absorption est faible jouent un rôle négligeable à côté des parties centrales.

d) Nous pourrions donc calculer la fonction de poids g_1 (absorption, diffusion dans raies fortes) et la fonction g_2 (diffusion dans raies faibles, ou ailes de raies fortes).

Dans le cas solaire, ces fonctions ont été calculées (à partir des expressions analytiques de $B(\tau)$ déduites par CHALONGE-KOURGANOFF [2] des mesures d'assombrissement continu) par MINNAERT, puis par l'auteur.

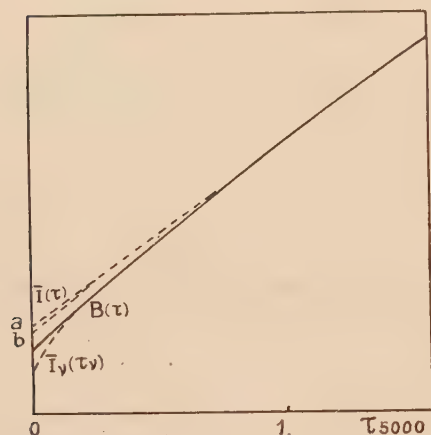


FIG. 6. — Intensités moyennes dans la photosphère : a) calcul approché (approximation d'EDDINGTON-PANNEKOEK ; b) Calcul exact.

Nous devons toutefois remarquer que, pour le calcul de g_2 effectué dans ces tables, il a été fait usage de l'expression de $\bar{I}$ obtenue en utilisant les approximations d'EDDINGTON [4] sous la forme que

leur a donné PANNEKOEK [15]. On sait [10] que ces approximations sont sans doute insuffisantes : il y aurait donc lieu de refaire ces calculs en utilisant plutôt la formule suivante :

$$(128) \quad \bar{I} = A \{ A + B\tau + C\tau^2 \} = A \Lambda \{ 1 \} + B \Lambda \{ \tau \} + C \Lambda \{ \tau^2 \}.$$

On trouvera au chapitre I les expressions de ces fonctions et leurs tables dans un mémoire de V. KOURGANOFF [2].

Dans le tableau 4, on a comparé les fonctions de poids g_2 calculées d'une part avec l'approximation d'EDDINGTON-PANNEKOEK, d'autre part avec l'expression ci-dessous de $\bar{I}$. Les calculs ont été faits dans le cas du soleil, pour $\lambda = 5\,040 \text{ \AA}$ et pour les valeurs $\cos \theta = 1$ et $\cos \theta = 0.2$.

Les expressions de $\bar{I}$ sont :

$$(129) \quad \bar{I}_M = A [1 - 0,49 e^{-\sqrt{3}\tau}] + B [\tau + 0,29 e^{-\sqrt{3}\tau}] + 2C \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \tau^2 - \frac{1}{6} e^{-\sqrt{3}\tau} \right]$$

(MINNAERT, utilisant les approximations d'EDDINGTON-PANNEKOEK)

$$(130) \quad \bar{I}_{ex} = A [1 - 0,50 K_2(\tau)] + B [\tau + 0,50 K_3(\tau)] + 2C \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \tau^2 - \frac{1}{2} K_1(\tau) \right]$$

(en utilisant l'expression (128))

d'où

$$\bar{I}_{ex} - \bar{I}_M.$$

Puisque l'on a :

$$(131) \quad g_{2M} - g_{2ex} = \frac{\bar{I}_{ex} - \bar{I}_M}{A + B\mu + 2C\mu^2} \frac{e^{-\tau/\mu}}{\mu},$$

on voit que la différence est très faible pour $\mu = 1$ mais devient plus importante au bord du disque solaire. Cette différence est telle qu'elle change le tracé théorique des courbes représentant la variation entre le centre et le bord du disque solaire d'une raie formée par diffusion (fig. 7).

e) Remarquons encore qu'en utilisant une formule du type

$$S = a + b\tau + c\tau^2$$

on peut mettre $e^{-\tau/\mu}$ en facteur dans g_1 ou g_2 . Dès lors, il nous paraît préférable, en remarquant que : $\mathcal{G} = g e^{\tau/\mu}$ est presque constant en fonction de τ , de tabuler la fonction $\mathcal{G}$ plutôt que g , afin de faciliter les interpolations.

On a, si :

$$B = a + b\tau + c\tau^2$$

et

$$\eta = 1$$

$$(132) \quad \mathcal{G}_+ = \frac{b + 2c(\tau + \mu)}{a + b\mu + 2c\mu^2} \quad \mathcal{G}_- = \frac{b + 2c(\tau + \mu)}{a + b\mu + 2c\mu^2} - \frac{e^{\tau/\mu}}{\mu}.$$

f) Tout ce que nous venons de dire se généralise également aux fonctions G_1 et G_2 , fonctions de poids pour le calcul des raies du spectre du disque total. Il est alors nécessaire d'utiliser les tables des fonctions $K_n(x)$ de PLACZEK [21].

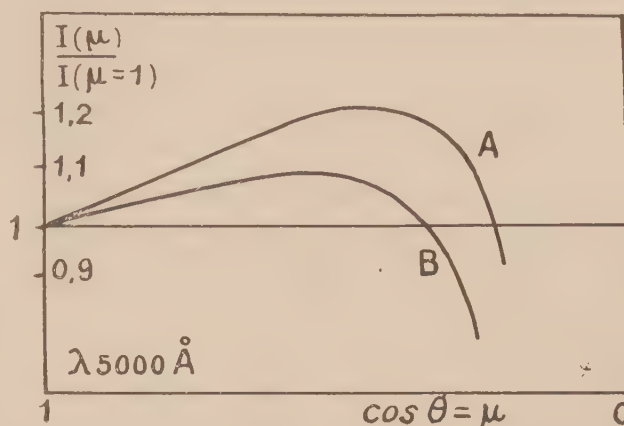


FIG. 7. — Assombrissement théorique.

Dans le cas d'une raie faible lorsque la fonction de poids de diffusion a été calculée en utilisant l'approximation d'EDDINGTON (courbe A) et avec une méthode plus exacte (courbe B).

APPENDICE 3

TABULATION DE LA FONCTION DE SATURATION

a) On a :

$$(133) \quad \Psi = \int_0^\infty H(a, v) e^{-\omega H\left(a, \frac{v}{\omega}\right)} dv,$$

La connaissance de la fonction $H(a, v)$ [5,6] suffit en principe pour faire ce calcul.

b) Mais on peut aussi écrire :

$$(134) \quad \Psi = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n H(a, v) H^n \left(a, \frac{v}{\omega} \right) \frac{x^n}{n!} dv = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H(a, v) H^n \left(a, \frac{v}{\omega} \right) dv.$$

Cette dernière intégrale peut être calculée quel que soit n

On a :

$$(135) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} H(a, v) H^n \left(a, \frac{v}{\omega} \right) dv = I_{00}^0 + a [I_{01}^0 + n I_{10}^1] + \dots$$

$$(136) \quad \text{où} \quad I_{ij}^p = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i^{n-p} \left(\frac{v}{\omega} \right) v_j^p \left(\frac{v}{\omega} \right) h_j(v) dv.$$

Il est alors facile de montrer que :

$$(137) \quad I = \frac{\omega \sqrt{\pi}}{\sqrt{n + \omega^2}} - 2a \frac{\omega}{n + \omega^2} \sqrt{n} [1 + \sqrt{n(n + \omega^2 - 1)}] + \dots$$

Et par suite :

$$(138) \quad \Psi = \frac{1}{2} \omega \left[\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n + \omega^2}} + \dots \right].$$

Dans le cas $a = 0$, on a en particulier :

$$(139) \quad \Psi = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{n + \omega^2}}.$$

La série qui joue un rôle dans cette fonction est alors facile à sommer ⁽¹⁾. On écrira en effet :

$$(140) \quad \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{n + \omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \omega \int_0^\infty e^{-xe^{-t^2} - \omega^2 t^2} dt.$$

ce qui nous ramène à l'expression (133) où l'on a fait $H(a, v) = h_1(v)$ mais qui nous donne en même temps le moyen de sommer certaines séries.

On posera ensuite :

$$(141) \quad \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{n + \omega^2}} = \frac{2\omega}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{x} \right)^{\omega^2} \int_0^\infty E_0(\omega^2, t^2 - t_0^2) dt$$

$$(142) \quad E_0(\omega^2, t^2 - t_0^2) = e^{-\omega^2 [e^{-(t^2 - t_0^2)} - 1 + (t^2 - t_0^2)]}$$

$$(143) \quad t - t_0 = \left[\log_e \frac{x}{\omega^2} \right]^{1/2}$$

est la valeur pour laquelle l'argument de l'exponentielle de la formule (140) passe par un maximum.

(1) C'est au Dr R. H. DALITZ, de l'Université de Birmingham, que je dois cette remarque. C'est un plaisir pour moi de le remercier ici de ses lettres qui m'ont grandement facilité l'étude de Ψ .

TABLEAU 5

LA FONCTION DE SATURATION

 $\log \Psi(x, a, \omega = 1)$

$\log x =$	1	2	3	4	5	6
$a = 0.00$	2.50	3.35	4.27			
0.01		3.62	3.26	4.82	4.32	5.82
0.03		3.92	3.52	3.05	4.55	4.05
0.05		2.09	3.64	3.16	4.66	4.16
0.07		2.21	3.73	3.24	4.74	4.24
0.10		2.30	3.81	3.31	4.81	4.31
0.15		2.39	3.90	3.40	4.90	4.40
0.20		2.45	3.96	3.46	4.96	4.46

$a = 0$	$\log x$	x	$\log \Psi(x, 0, 1)$	$x \Psi(x, 0, 1)$	$\int_0^\infty \Psi(x) dx$
		0.00	1.947		
	2	0.01	1.944	.00879	.00882
		0.05	1.933	.0429	.0436
	1	0.1	1.917	.0827	.0868
		0.5	1.798	.314	.369
	0	1	1.660	.457	.639
	0.5		1.173	.471	1.23
	1		2.502	.318	1.68
	1.5		3.914	.259	1.80
	2		3.354	.226	1.81
	2.5		4.804	.201	1.81
	3		4.269	.186	1.81
	3.5		5.734	.171	1.81
	4		5.206	.161	1.81
	4.5		6.683	.152	1.81
	5		6.160	.145	1.81
	5.5		7.640	.138	1.81
	6		7.121	.132	1.81

Sur la figure 8, on peut se rendre compte de l'allure générale de la fonction Ψ .

On voit qu'il est possible de trouver des expressions asymptotiques simples de la série ci-dessus, en développant autour de t_0 la fonction E_0 :

$$(144) \quad E_0 \cong e^{-\frac{\omega^2}{2}(t^2 - t_0^2)^2}.$$

c) Il est possible de même, pour $a \neq 0$, de faire intervenir d'autres fonctions définies par des séries.

Mais dans ce cas les calculs sont plus simples à partir de l'équation (133) et des tables de $H(a, v)$ de HJERTING.

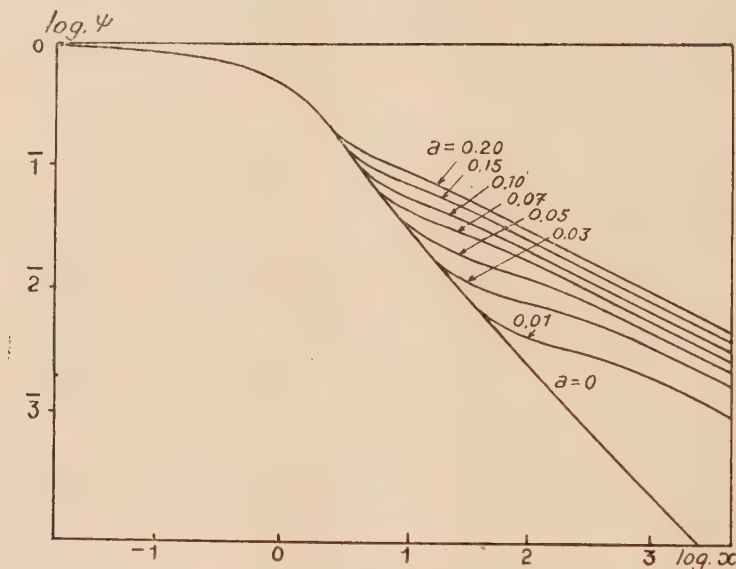


FIG. 8. — La fonction de saturation $\Psi(x, a)$.

d) Le tableau 5 rassemble les résultats numériques et les tabulations concernant Ψ .

Des tables plus précises et plus complètes sont actuellement en préparation.

e) On remarquera que si x est grand et $a \neq 0$

$$(145) \quad H(a, v) \cong \frac{a}{v^2 \sqrt{\pi}}$$

$$(146) \quad \Psi \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x} \sqrt{\pi}}.$$

Manuscrit reçu le 6 juillet 1950.

BIBLIOGRAPHIE

- A) Travaux récents sur le calcul des raies d'absorption et non cités dans le cours de ce chapitre. (Postérieurs à la bibliographie de A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Springer, Berlin.)
 STRÖMGREN B., *Ap. J.*, **86** (1937), 1.
 CESCO C. U., CHANDRASEKHAR S., SAHADE J., *Ap. J.*, **100** (1944), 355 ; *Ap. J.*, **101** (1945), 320.
 TUBERG M., *Ap. J.*, **103** (1946), 145. (Calcul théorique de raies solaires intenses.)
 MÜNCH G., *Ap. J.*, **104** (1946), 87 (blanketing effect).
 PLASKETT J. J., *M. N.*, **107** (1947), 117. (Vue d'ensemble de la question ; bibliographie.)
 MINNAERT M., *M. N.*, **107** (1947), 274. (Vue d'ensemble de la question ; bibliographie.)
 HARRIS D. L., III, *Ap. J.*, **109** (1949), 53.
 WRUBEL M. H., *Ap. J.*, **109** (1949), 67 (courbes de croissance) ; **111** (1950), 157.

V. — Le « Blanketing effect » et la structure de la photosphère solaire.

par Jean-Claude PECKER

SOMMAIRE. — *Les différentes raies du spectre solaire étant classées et ramenées à un certain nombre de raies-types, suivant leur longueur d'onde, le potentiel d'ionisation, et le potentiel d'excitation de l'atome absorbant, on a calculé, en fonction de la profondeur optique pour chaque raie-type, la fraction du flux total absorbée, en utilisant une méthode proposée par l'auteur (contribution à la théorie du type spectral IV). On en déduit la variation du flux absorbé dans toutes les raies, en fonction de la profondeur ; puis l'influence de cette variation sur un modèle solaire de première approximation correspondant à l'équilibre radiatif.*

Ce calcul conduit à un modèle de l'atmosphère solaire dont la température de surface est de l'ordre de 4 200°. Or la température de surface déduite des mesures d'assombrissement dans le spectre continu est de 4 800°. Cette différence est peut être due à l'erreur introduite dans l'interprétation des mesures d'assombrissement par l'hypothèse de la sphéricité parfaite des couches photosphériques : un effet de « rugosité » (roughening) dû à l'influence de la granulation sur les couches extérieures de la photosphère permettrait un accord quantitatif convenable, au moins au voisinage de la surface, le désaccord subsistant dans les grandes profondeurs.

A) CALCUL D'UN MODÈLE SOLAIRE

TENANT COMPTE DE LA FORMATION DES RAIES D'ABSORPTION

I. Le problème du blanketing effect.

1. *Introduction.* — On sait calculer [30] un modèle d'atmosphère pour une étoile en équilibre radiatif, dans le cas général où le coefficient d'absorption dépend de la longueur d'onde. On pourrait donc, en principe, construire un modèle où le coefficient d'absorption tiendrait compte à la fois de l'absorption continue et des raies spectrales (problème dit du « blanketing ⁽¹⁾ effect »). Il faudrait alors calculer les fonctions-sources pour un grand nombre de longueurs d'onde (plusieurs par raie). La difficulté des calculs effectués au chapitre III dans le cas d'une étoile B — qui portaient pourtant que sur 14 longueurs d'onde et négligeaient l'absorption dans les raies — laisse prévoir qu'il sera impossible de résoudre le problème du blanketing effect par une telle méthode.

⁽¹⁾ A la suite des auteurs français ayant étudié ou mentionné ce problème, j'ai continué à utiliser le terme anglais de « blanketing effect », bien que ce terme ait été traduit avec élégance en français par V. KOURGANOFF (dans sa traduction de : A. UNSÖLD, *Physik der Sternatmosphären*) au moyen de l'expression « effet de serre ».

Nous partirons donc d'un modèle ne tenant compte que de l'absorption continue (modèle à flux « continu » constant), puis nous lui appliquerons une correction dépendant des raies spectrales. La fraction du flux total absorbée dans les raies n'est naturellement pas constante en fonction de la profondeur. Par suite, si le flux continu est constant, il n'en est plus de même du flux total et il faudra calculer une correction de *blanketing effect*.

Ce problème a déjà été abordé par de nombreux auteurs : citons seulement, sans décrire les méthodes employées, les travaux de MILNE [22], CHANDRASEKHAR [8], MÜNCH [28], UNSÖLD [43, 44].

2. *Méthode générale utilisée.* — Le modèle construit sans tenir compte des raies a un flux continu F constant, et un flux total non constant $F + \Delta F$. Nous devons obtenir un modèle pour lequel le flux continu est $F + \Delta F$ et le flux total, F constant.

La correction de « blanketing » qui permet le passage du premier de ces deux modèles au second, pourra donc être considérée comme une dernière étape de la méthode de calcul des modèles d'atmosphères proposée par STRÖMGREN [41] et qui permet d'obtenir un modèle à flux constant (voir TS I, TS III). Cette correction sera, on le sait,

$$(1) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4} \frac{\int_0^\infty (\kappa_\lambda + \kappa) (\bar{I}_\lambda - B_\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty (\kappa_\lambda + \kappa) B_\lambda d\lambda}$$

On voit que cette formule ne fait pas intervenir le coefficient de diffusion σ_λ : les raies formées par diffusion n'interviennent pas dans la correction, contrairement aux premières idées de MILNE.

Il s'agit maintenant de rattacher $\frac{\Delta T}{T}$ à la portion du flux absorbée dans les raies. Écrivons (TS I, § 25) :

$$(2) \quad \frac{dF}{dp} = \frac{4}{g} \int_0^\infty (\kappa_\lambda + \kappa) (\bar{I}_\lambda - B_\lambda) d\lambda$$

Pas suite

$$(3) \quad \frac{dF}{dp} = \frac{16}{g} \frac{\Delta T}{T} \left[\int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda d\lambda + \int_0^\infty \kappa B_\lambda d\lambda \right]$$

Si nous supposons que le flux continu est constant $\left(\int_0^\infty \kappa (\bar{I} - B_\lambda) d\lambda = 0 \right)$ et que dans les raies $\bar{I}_\lambda \ll B_\lambda$, nous obtenons en première approximation :

$$(4) \quad \int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda d\lambda = -4 \frac{\Delta T}{T} \int_0^\infty \kappa B d\lambda$$

D'où

$$(5) \quad \frac{\Delta T}{T} \left(1 - 4 \frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{dF}{dp} \frac{g}{16} \frac{1}{\int_0^\infty \kappa B_\lambda d\lambda}$$

et, puisque $F + \Delta F = c^{\text{te}}$ (flux continu constant) :

$$(6) \quad \frac{\Delta T}{T} \left(1 - 4 \frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{-d}{d\tau_{5000}} \left(\frac{\Delta F}{F} \right) \frac{\kappa_{5000}}{\int_0^\infty \kappa B_\lambda d\lambda / \int_0^\infty B_\lambda d\lambda} \left(\frac{T_e}{2T} \right)^4$$

Il suffira donc de calculer la variation $\frac{\Delta F}{F}$ du flux absorbé dans les raies.

Nous procéderons de la façon suivante :

a) En toute rigueur, chaque raie est singulière ; mais par une étude du spectre solaire, nous classons les raies d'absorption suivant les potentiels d'excitation, d'ionisation et la longueur d'onde. Nous réduisons ainsi les raies à un petit nombre de raies types.

b) Nous montrons ensuite, en utilisant la théorie des raies spectrales (voir TS IV), comment varie $\frac{\Delta F}{F}$ avec la profondeur τ pour chaque raie-type.

c) Nous calculons $\frac{\Delta F}{F}$ pour l'ensemble du spectre, et enfin $\frac{\Delta T}{T}$.

Une méthode analogue mais plus schématique a déjà été étudiée par A. DAMGAARD, que je remercie pour m'avoir communiqué ses calculs (non publiés).

II. Classification des raies du spectre solaire.

3. — Il est impossible d'étudier séparément l'influence de chaque raie solaire sur l'effet de « blanketing », mais nous pouvons ramener les différentes raies à un petit nombre de raies-types dont nous calculerons l'importance relative.

4. *Paramètres de la classification.* — Nous classerons donc les raies solaires suivant leur longueur d'onde, et l'état d'ionisation, le potentiel d'ionisation et enfin le potentiel d'excitation des atomes absorbants.

a) Le spectre a été divisé en 6 parties correspondant aux 6 tables de fonctions de poids publiées antérieurement [32, 23]. Toutefois, pour la précision de la calibration des raies, nous avons subdivisé certaines parties en fractions plus étroites (tableau 1). Les résultats ont ensuite été regroupés.

b) Suivant le principe adopté par PANNEKOEK [29], nous avons séparé les atomes en 3 classes (tableau 3).

- atomes presque entièrement ionisés (potentiel d'ionisation $\mathcal{J} < 7.5$ volts) ;
- atomes d'ionisation très variable avec la profondeur $7.5 \text{ v} < \mathcal{J} < 12.5 \text{ v}$;
- atomes presque pas ionisés $\mathcal{J} > 12.5$ volts.

De plus, nous avons séparé les raies provenant des atomes neutres de celles provenant des atomes ionisés.

c) Les raies ont été classées suivant leur potentiel d'excitation en 6 fractions :

$\mathcal{E} = 0$ volt (raies de résonance)
$\mathcal{E}$ compris entre 0 — 0,5 v
» » 0,5 — 1,5 v
» » 1,5 — 2,5 v
» » 2,5 — 5 v
$\mathcal{E}$ supérieur à 5 volts.

Les atomes neutres de potentiel d'ionisation inférieur à 7,5 v ont été classés en 4 classes suivant la valeur de la différence $\mathcal{J} - \mathcal{E}$

$\mathcal{J} - \mathcal{E}$ inférieur à 2,5 volts
compris entre 2,5 et 5 volts
» » 5 et 7,5 volts
supérieur à 7,5 volts.

On se rendra compte du degré de simplification apporté en notant que le nombre total de raies solaires est de l'ordre de 4 000, le nombre de raies-types étant 78 (compte non tenu des raies-types d'intensité nulle).

5. *Matériel utilisé. Calibration.* — Les raies classées sont celles des raies des Revised Rowland Tables [40] (entre 2 975 et 6 600 Å) et des tables de BABCOCK et MOORE [2] qui sont identifiées dans ces ouvrages et dont les potentiels d'excitation sont connus. Nous nous sommes limités aux raies d'intensité Rowland :

$$IR > 0.$$

Pour les raies $IR < 10$, nous avons utilisé (tableau 1) entre 2 975 et 6 600 Å la calibration de MULDER (extrapolée vers l'ultra-violet et pour les intensités Rowland $IR = 9$ et 10) entre 6 600 et 13 500 Å celle de BABCOCK et MOORE [2].

Pour les raies $IR > 10$, nous avons mesuré directement les largeurs équivalentes sur l'atlas d'Utrecht [24] entre 3 410 Å et 8 808 Å (en deçà et au delà de ces limites, nous avons fait une extrapolation grossière de ces mesures). Enfin, pour certaines de ces raies, déjà mesurées par HOUTGAST [13], nous avons utilisé les résultats de cet auteur (tableau 4).

Nous obtenons ainsi pour chaque catégorie de raies une largeur équivalente qu'il est nécessaire de corriger

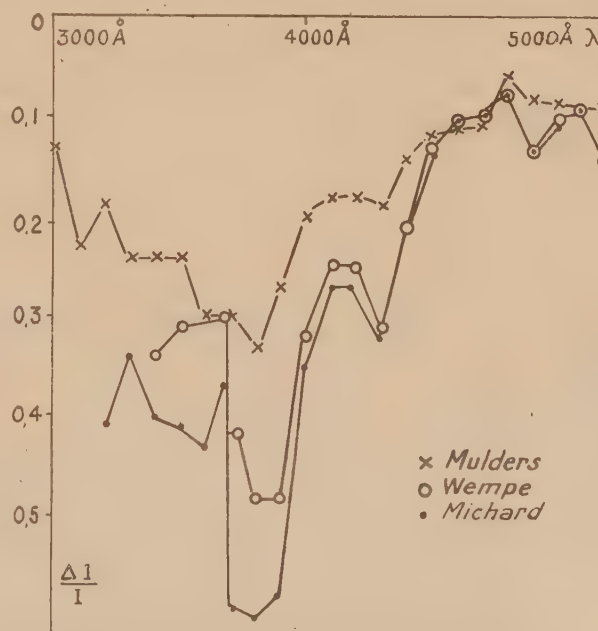


FIG. 1. — L'absorption par les raies dans la partie ultra-violette du spectre du centre du soleil.

de l'erreur faite en ne recensant qu'une partie des raies. La correction a été faite comme il est indiqué dans le tableau 2.

De plus, il faut noter [48, 20] que la calibration de MULDERs est affectée par une grande incertitude sur le spectre continu, principalement dans la partie U-V du spectre. Nous avons tenu compte de cet effet en multipliant nos largeurs équivalentes par un nouveau coefficient correctif, calculé au moyen des données de MICHARD (fig. 4, tableau 4).

6. *Coefficient de blanketing.* — Nous disposons maintenant pour chaque raie-type d'une largeur équivalente (tableaux 5_A et 5_B).

Nous devons en déduire le coefficient de blanketing défini par la formule :

$$(7) \quad \eta_{\text{c}} = \frac{\sum_i \int_{\text{raies}} (I - I_{\lambda}) d\lambda}{\int_0^{\infty} I d\lambda} = \sum W_i \frac{I}{\int_0^{\infty} I d\lambda} = \sum w_i p_{\lambda}$$

où la largeur équivalente d'une raie quelconque W_i est :

$$W_i = \int_{\text{raie } i} \frac{I - I_{\lambda}}{I} d\lambda$$

et où la sommation est effectuée sur le nombre total de raies du spectre.

Les « poids » p_{λ} déduits des valeurs de l'intensité utilisées par MICHARD sont réunis dans le tableau 4.

On obtient :

$$\eta = 0.124 \text{ (dont } 0.013 \text{ dû aux raies de résonance)}$$

(valeur obtenue par MULDERs 0.083)

MICHARD 0.124).

Il s'agit ici du coefficient de blanketing correspondant au *centre* du disque et non au disque total.

III. *Fraction du flux absorbé dans les raies.*

7. *Calcul de $W(t)/w(0)$: Formules.* — Pour chacune des raies-types, nous calculerons, à plusieurs profondeurs ($\tau_{5000} = 0 ; 0,05 ; 0,2 ; 0,6 ; 1 ; 2,6$), la largeur équivalente de la raie considérée dans le spectre du disque total, et le rapport $w(\tau)/w(0)$.

On supposera que les raies contribuant à l'effet sont essentiellement des raies fortes, appartenant à la seconde portion rectiligne de la courbe de croissance : la fonction de saturation prend alors une forme simple (ch. IV, § 11). Cette supposition entraîne une erreur assez faible : en effet, les raies fortes fourniront des valeurs de $w(\tau)/w(0)$ intermédiaires entre celles fournies par les raies moyennes et par les raies faibles : les erreurs faites en négligeant celles-ci doivent donc se compenser. On a pu vérifier ce fait sur le cas particulier d'une raie du fer (fig. 3).

La formule utilisée est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
 (8) \quad w(\tau) = & \frac{2B I(0,1)}{F(\tau)} \left[\int_{\tau}^{\infty} b(\tau') \sqrt{a(\tau')} \frac{1}{\sqrt{x(\tau, \tau')}} K_3(\tau' - \tau) \sqrt{\frac{K_4(\tau' - \tau)}{K_3(\tau' - \tau)}} d\tau' \right. \\
 & \left. - \int_0^{\tau} b(\tau') \sqrt{a(\tau')} \frac{1}{\sqrt{x(\tau, \tau')}} \sqrt{\frac{K_4(\tau - \tau')}{K_3(\tau - \tau')}} d\tau' \right] \\
 & + 4C \frac{I(0,1)}{F(\tau)} \left[\int_{\tau}^{\infty} \frac{b \sqrt{a}}{\sqrt{x}} \tau' K_3 \sqrt{\frac{K_4}{K_3}} d\tau' - \int_0^{\tau} \frac{b \sqrt{a}}{\sqrt{x}} \tau' K_3 \sqrt{\frac{K_4}{K_3}} d\tau' \right] \\
 & + 4C \frac{I(0,1)}{F(\tau)} \left[\int_{\tau}^{\infty} b \sqrt{a} \frac{1}{\sqrt{x}} K_1 \sqrt{\frac{K_4}{K_3}} d\tau' + \int_0^{\tau} \frac{b \sqrt{a}}{\sqrt{x}} K_1 \sqrt{\frac{K_4}{K_3}} d\tau' \right] \\
 & + 2 \frac{I(0,1)}{F(\tau)} \sqrt{\frac{K_4(\tau)}{K_3(\tau)}} [AK_2(\tau) + BK_1(\tau) + CK_1(\tau)] \left[\int_0^{\tau} b \sqrt{a} \frac{1}{\sqrt{x}} d\tau' \right]
 \end{aligned}$$

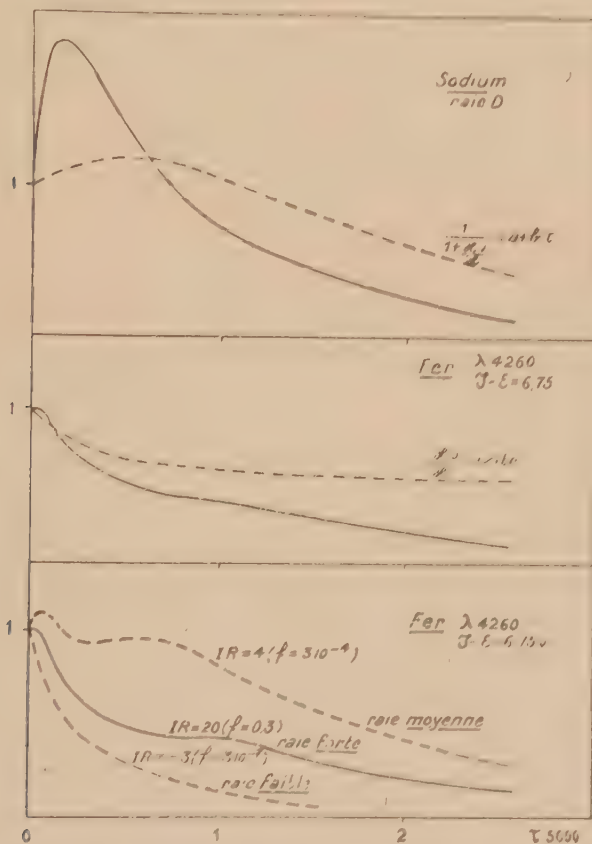


FIG. 2.

FIG. 3.

FIG. 2. — Comparaison entre la variation avec la profondeur de deux raies spectrales, selon A. DAMGAARD (pointillé) et l'auteur (trait plein).

FIG. 3. — Variation avec la profondeur d'une raie spectrale pour plusieurs valeurs de la force d'oscillateur pour lesquelles cette raie se situe dans les différentes parties de la courbe de croissance.

où A, B, C sont les coefficients du développement de $B(\tau')/I(0,1)$

$$\frac{B(\tau')}{I(0,1)} = A + B\tau + C\tau^2$$

$F(\tau)$ est le flux monochromatique continu.

τ, τ' sont des profondeurs optiques continues monochromatiques.

a, b, x sont les fonctions introduites dans TS IV.

8. *Remarque sur la formule utilisée.* — La formule ci-dessus diffère légèrement de celle de TS IV (formule 90) par l'utilisation dans le dernier terme d'une meilleure formule d'intégration par rapport à μ .

L'expression

$$A K_3(\tau) + B \sqrt{K_4(\tau) K_3(\tau)} + C K_4(\tau)$$

y a été en effet remplacée par :

$$A K_2(\tau) \sqrt{\frac{K_4(\tau)}{K_3(\tau)}} + B \sqrt{K_4(\tau) K_3(\tau)} + C K_4(\tau) \sqrt{\frac{K_4(\tau)}{K_3(\tau)}}$$

Il aurait encore mieux valu utiliser l'expression suivante, rigoureuse pour les raies fortes :

$$A K_{2,5}(\tau) + B K_{3,5}(\tau) + C K_{4,5}(\tau)$$

où les fonctions $K_{n+\frac{1}{2}}(\tau)$ sont définies par la relation :

$$(9) \quad K_{n+\frac{1}{2}}(\tau) = \int_1^\infty e^{-u\tau} \frac{du}{u^n \sqrt{u}}$$

La tabulation de ces fonctions est actuellement entreprise par l'auteur.

9. *Calcul de $\omega(\tau)/W(0)$.* — Le calcul a été entrepris avec les simplifications suivantes :

a) $b(\tau'), a(\tau'), \sqrt{x(\tau\tau')}$ ont été calculées à une constante près, car le calcul ne cherche qu'à obtenir $\omega(\tau)/\omega(0)$. De plus, la fonction $a(\tau')$ a été approchée dans tous les cas par la valeur exacte de cette fonction pour une raie du fer [λ 4 260, $\mathcal{J} - \mathcal{E} = 6.75$ volts]. L'approximation ainsi faite n'entraîne que peu d'erreur car l'amortissement par rayonnement est très faible et car la loi de variation de a avec la température est pratiquement indépendante de la raie étudiée.

b) A, B, C, sont les coefficients calculés par CHALONGE et KOURGANOFF [6].

On notera qu'on aurait dû, en toute rigueur, utiliser pour ce calcul un modèle théorique et non le modèle empirique de CHALONGE-KOURGANOFF : il aurait même fallu utiliser une méthode d'itération en introduisant dans le calcul de l'effet de blanketing (en deuxième approximation) un modèle qui tienne compte de cet effet (calculé en première approximation). Pourtant, nous avons conservé le modèle empirique en remarquant que l'erreur due à ce choix n'est que du second ordre, et que d'autre part le calcul est beaucoup plus simple ainsi, les coefficients A, B, C étant d'emblée à notre disposition.

c) Chaque expression entre crochets a été calculée exactement pour $\lambda = 5\,000\text{\AA}$. Pour les autres longueurs d'onde, on s'est borné à multiplier l'expression entre

crochets correspondant à 5 000 Å par un coefficient convenablement choisi, en s'inspirant des remarques de MINNAERT [23].

Les discontinuités de la fonction intégrée ont été éliminées en remarquant que la fonction $b\Psi'$ équivaut à $\frac{1}{\sqrt{\tau' - \tau}}$ au point $\tau = \tau'$ (voir TS IV, § 24).

Les intégrales ont été calculées au moyen d'un planimètre OTT.

Nous ne donnerons pas les tables détaillées de $w(\tau)/w(0)$. Remarquons seulement que $w(\tau)/w(0)$ dépend peu des potentiels d'excitation et d'ionisation et beaucoup de la longueur d'onde (fig. 4).

De plus, sur la figure 2, nous avons comparé, pour une raie du fer et la raie du sodium, notre résultat avec celui de A. DAMGAARD, obtenu en faisant sur la variation avec τ de $\eta = \frac{\kappa_v}{\kappa}$ des hypothèses simples.

10. *Calcul de la largeur équivalente des raies sur le disque total.* — Pour obtenir la fraction du flux total absorbée dans les raies, il est nécessaire de connaître non pas les largeurs équivalentes w au centre du disque (dont nous disposons), mais les largeurs équivalentes correspondant au *disque total* w .

Pour passer des unes aux autres, nous allons calculer pour chaque raie-

type le rapport : $\frac{W(0)}{w(0, \mu = 1)}$.

Nous disposons de $W(0)$:

$$(10) \quad W(0) = \int_0^\infty b(\tau') \sqrt{a(\tau')} \frac{1}{\sqrt{x(\tau')}} \left[\sqrt{\frac{K_4}{K_3}} \frac{2I(0,1) \left[B + 2C\tau' + 2C \frac{K_4}{K_3} \right]}{F} d\tau' \right]$$

et de $w(0)$

$$(11) \quad w(0) = \int_0^\infty b(\tau') \sqrt{a(\tau')} \frac{1}{\sqrt{x(\tau')}} g_1(\tau') d\tau'$$

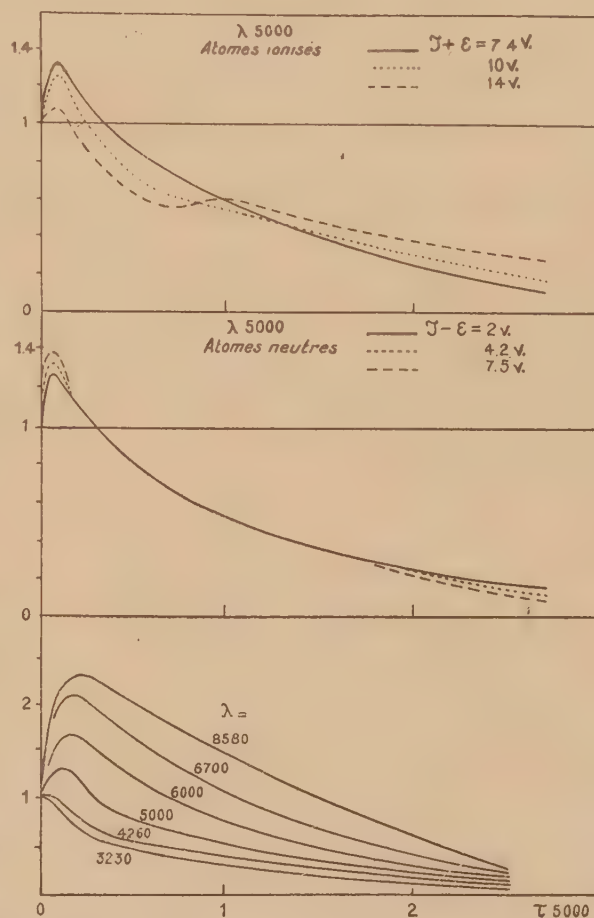


FIG. 4. — Variation de l'absorption par les raies en fonction de la profondeur pour différents degrés d'ionisation et d'excitation et pour différentes longueurs d'onde.

où g_1 est la fonction de poids d'absorption, tabulée pour les longueurs d'onde étudiées au moyen des coefficients A, B, C de CHALONGE-KOURGANOFF [32].

Le tableau 6 résume les résultats obtenus.

La valeurs du blanketing effect qui se déduit des tableaux 5 et 6 est la suivante :

$$\eta^* = 0.117 \text{ (dont } 0.014 \text{ dû aux raies de résonance).}$$

Ces résultats sont en accord avec les mesures effectuées par MICHARD sur l'Atlas d'Utrecht [20], dans la zone spectrale de 25 Å où les enregistrements de cet Atlas ont été faits à la fois pour le centre du disque et pour le disque total.

11. *Fraction du flux absorbée dans les raies.* — Nous pouvons donc, en combinant les valeurs calculées de $\frac{W(\tau)}{W(0)}$ et de $\frac{W(0)}{\omega(0)}$ et les valeurs mesurées de $\omega(0)$, obtenir $W(\tau)$ pour chaque espèce de raie, puis $\eta_*(\tau) = \frac{\Delta F}{F}(\tau)$ (fig. 5).

Cette valeur a été abtenue en n'utilisant que les raies de potentiel d'excitation non nul (considérées comme formées par absorption) et en éliminant les raies de résonance (considérées comme formées par diffusion), selon la suggestion d'UNSÖLD [43].

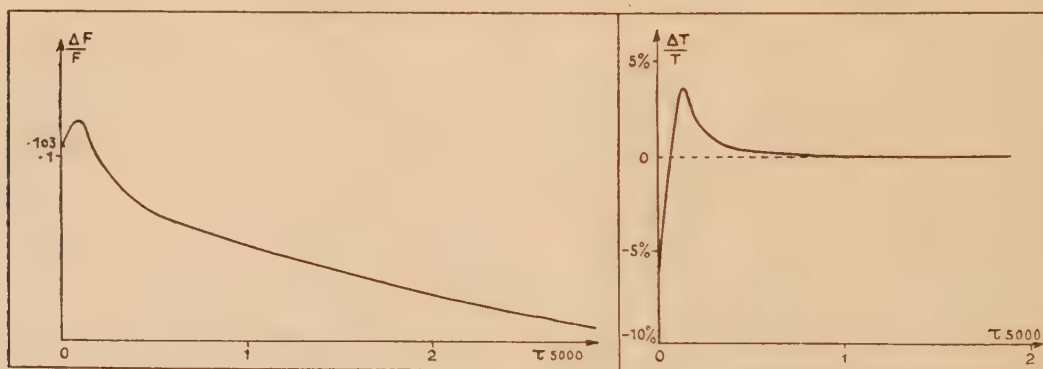


FIG. 5.

FIG. 6.

FIG. 5. — *L'absorption par les raies dans la photosphère.*

(Cette figure ne concerne pas l'absorption par les raies de résonance, considérées comme formées par diffusion.)

FIG. 6. — *L'influence des raies d'absorption sur le modèle solaire.*

12. *Correction à apporter à un modèle à flux continu constant.* — Des valeurs de $\frac{\Delta F}{F}$, la formule (6) permet de déduire la valeur de $\frac{\Delta T}{T}$ (fig. 6, tableau 7). Les valeurs des coefficients d'absorption et de $\int \kappa B_\lambda d\lambda$ sont celle calculées par MICHARD.

Si l'on applique cette correction au modèle de MICHARD (modèle B), on trouve un modèle (fig. 7) dont la température de surface est 4 200° (modèle B') et dont

l'allure est conforme aux prévisions de UNSÖLD [44] et à l'interprétation de PLASKETT [35].

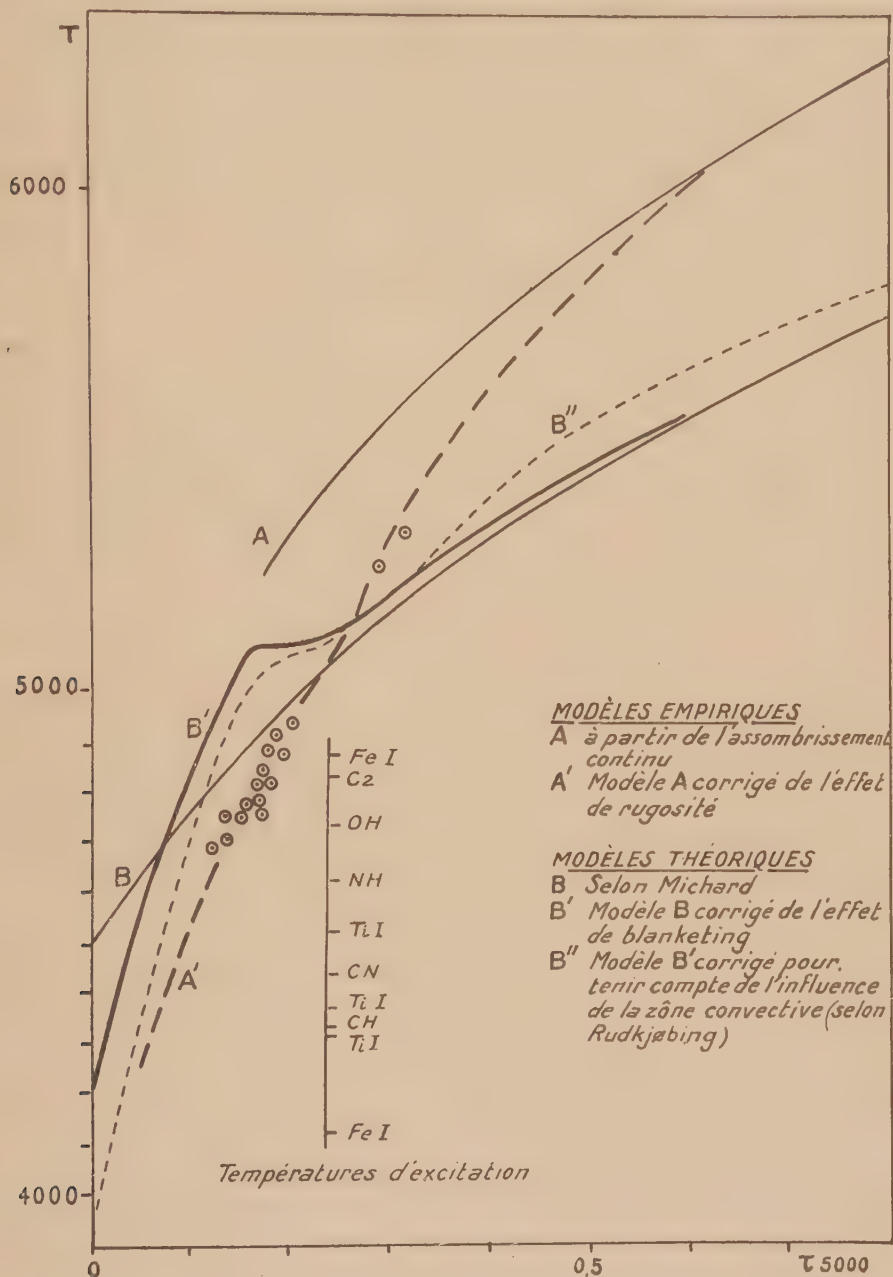


FIG. 7. — Modèles de la photosphère solaire.

Ce modèle est encore loin d'être parfait.

a) Il ne tient pas compte de l'influence de la zone convective qui est sans doute importante [39], mais dont le calcul ne peut être fait convenablement.

Nous avons essayé d'appliquer au modèle B la correction trouvée par

RUDKJOBING, malgré les critiques qu'on peut lui faire : on obtient le modèle représenté par un trait pointillé sur la figure 7 (modèle B").

b) Il néglige les absorbants hypothétiques [5] [9] du spectre ultra-violet.

c) Certaines causes d'erreur interviennent même dans le calcul de la correction de blanketing : les proportions respectives utilisées des raies d'absorption et des raies de diffusion sont trop schématiques.

Les calculs portent sur un nombre insuffisant de longueurs d'onde et de profondeurs.

Les raies ne doivent pas toutes être considérées comme fortes, mais on aurait dû les séparer en raies fortes, moyennes, faibles.

B) MODÈLE SOLAIRE DÉDUIT DES MESURES D'ASSOMBRISSEMENT

13. — Ces dernières années, on a tenté, à la suite de R. LUNDBLAD [18] de déduire des mesures monochromatiques d'assombrissement dans le spectre continu du soleil, un modèle de l'atmosphère solaire, c'est-à-dire de résoudre l'équation intégrale :

$$(12) \quad I(o, \mu) = \int_0^\infty S(\tau) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}$$

L'assombrissement $\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)}$ et l'intensité au centre du disque $I(0, 1)$ sont fournis par l'expérience, et $S(\tau)$ est la fonction-source inconnue. Un grand nombre de méthodes [35, 4, 6, 3, 44] ont été utilisées et ont permis d'interpréter les nombreuses mesures d'assombrissement du disque solaire [1, 36, 25, 26, 7, 34, 17...]. Nous ne discuterons pas ici la valeur mathématique de ces méthodes. Les causes d'erreur d'ordre physique qui peuvent fausser l'interprétation des méthodes d'assombrissement nous paraissent en effet beaucoup plus importantes.

14. *Causes physiques d'erreur.* — a) On sait que l'intensité n'est pas mesurable à l'extrême voisinage du bord (environ $\mu < 0.2$). Cette incertitude entraîne une incertitude sur $S(\tau)$, surtout au voisinage de $\tau = 0$.

b) Il est également bien connu que l'intensité au centre du disque $I(0, 1)$ est mal connue.

c) Une autre cause d'erreur, déjà signalée par l'auteur [31], est sans doute beaucoup plus importante, au moins à la surface. Il est très probable, comme l'a fait remarquer REDMAN [37, 12, 31, 33], que la granulation solaire affecte la structure des couches superficielles du soleil (épaisseur de la couche radiative 200 kms, diamètre d'un granule 2 000 km) et détermine un certain relief de cette surface. Si l'on vise le bord du soleil, les rayons lumineux que l'on croit tangents à la surface font en réalité un angle non nul avec cette surface. On doit donc introduire dans la formule (12) un angle θ ($\cos \theta = \mu$) différent de l'angle θ observé. La

correction nécessaire $\mu_{\text{calc.}} - \mu_{\text{obs.}}$ a été calculée par REDMAN à partir des données classiques sur la granulation solaire.

Il nous paraît indispensable de tenir compte de cet effet de « rugosité » (« roughening »).

d) De plus, l'hétérogénéité thermique de la surface solaire permet de prévoir une loi d'assombrissement différente de celle d'un corps sphérique homogène.

Si nous supposons seulement deux sortes de zones, pour schématiser, nous aurons :

$$I(o, \mu) = \alpha_{\lambda} I_1(o, \mu) + \beta_{\lambda} I_2(o, \mu)$$

d'où

$$S(\tau) = \alpha_{\lambda} S_1(\tau) + \beta_{\lambda} S_2(\tau)$$

Par suite, pour obtenir la répartition des températures, nous devons égaler à la fonction de PLANCK non plus $S(\tau)$ mais $S_1(\tau)$ et $S_2(\tau)$.

e) Ces deux effets sont probablement superposés ; de plus, il est possible que les granules n'interviennent pas seuls dans l'effet de rugosité, les spicules [42] y jouent peut-être un rôle important.

L'intervention simultanée des effets « thermique » et « géométrique » de rugosité permettrait peut-être d'éliminer les difficultés hydrodynamiques [45] que pose l'amplitude du relief calculé en attribuant aux granules seuls l'effet observé par REDMAN.

En tous cas, la correction calculée par REDMAN, permet, quelle que soit sa signification physique, d'interpréter convenablement plusieurs phénomènes observables [37, 31, 33, 12, 11]. C'est donc cette correction que nous utiliserons.

15. *Températures de la surface solaire selon différents auteurs.* — Les méthodes utilisées par différents auteurs ont toutefois abouti jusqu'ici à des modèles dont la température de surface (voisine de $4\,800^\circ$) est une fonction *assez largement variable de la longueur d'onde* à laquelle ont été faites les mesures d'assombrissement.

De tels modèles nous paraissent inacceptables : en effet, les températures d'excitation déduites des intensités des bandes moléculaires fournissent [14] avec une grande précision des températures de l'ordre de $4\,500^\circ$, ce qui constitue une limite supérieure de la température de surface. MINNAERT [23] a pu calculer que le modèle de BARBIER [3] déduit de l'assombrissement aurait entraîné au contraire des températures moléculaires d'excitation de l'ordre de $5\,300^\circ$.

D'autres auteurs [49, 16, 19] ont également trouvé des températures d'excitation de $4\,500^\circ$ pour des raies métalliques, toutefois leur interprétation a été récemment contestée [47] contestation qui nous paraît d'ailleurs peu convaincante.

D'autre part, il est compréhensible que dans les régions opaques du spectre l'observation pénètre moins profondément, et qu'on y trouve des températures de surface plus basses que dans les régions transparentes. Ceci provient d'une mauvaise extrapolation des fonctions-sources monochromatiques, car il est évident qu'il n'y a

qu'une seule température pour une profondeur géométrique donnée, en un point de la surface solaire.

16. *Introduction de la correction de rugosité.* — Or, l'introduction d'une correction de rugosité de la surface solaire conduit à abaisser la température de surface. Elle permet aussi de réduire sensiblement la dispersion des évaluations de température provenant des différentes longueurs d'onde.

En effet, considérons (tableau 8) les températures de surface déduites des mesures d'assombrissement d'ABBOTT par la relation bien connue :

$$S(T = T_o) = I(o, \mu = o)$$

On peut obtenir $I(0, \mu)$ en extrapolant graphiquement vers la surface les courbes d'ABBOTT, procédé sans doute plus exact, malgré son caractère empirique, que les extrapolations calculées.

Soit T_λ une de ces températures « superficielles », elle correspond en réalité à une certaine profondeur τ_λ car selon REDMAN $\mu_{\text{obs}} = 0$ correspond à $\mu_{\text{réel}} = 0,17$ et parce que $I(0, \mu) = S(\tau_\lambda = \mu)$ pour de petites valeurs de μ et de τ_λ .

T_λ sera donc la température correspondant à $\tau_\lambda = 0,17$. Soit à

$$\tau_{5000} = 0,17 \frac{x_{5000}}{x_\lambda}$$

On a tabulé (tableau 8) les différentes valeurs de τ_{5000} correspondant à $\tau_\lambda = 0,17$. Chacune des valeurs de λ fournit sur la figure 7 un point du modèle. Les différents points sont groupés autour d'une courbe moyenne qui, si on l'extrapole jusqu'à la surface, fournit la partie superficielle d'un modèle solaire convenable.

De plus, en appliquant la correction $\tau - \tau_{\text{réel}} = \mu_{\text{obs}} - \mu_{\text{réel}}$ au modèle calculé à partir des mesures d'assombrissement, on obtient un modèle qui a été également représenté sur la figure 7.

C) CONCLUSION

L'examen de la figure 7 nous montre que le modèle empirique est bien différent du modèle théorique, aux grandes profondeurs comme à la surface.

La correction de rugosité permet d'améliorer la coïncidence dans les régions superficielles, mais la valeur exacte de cette correction est assez mal déterminée ; de plus, une connaissance moins imprécise de l'intensité centrale du soleil permettrait peut-être d'obtenir aux grandes profondeurs un modèle empirique meilleur.

Le modèle théorique est, lui aussi, loin d'être parfait : l'influence de la zone convective est très mal connue, l'existence d'absorbants non encore décelés [5, 9] peut modifier considérablement le modèle, et enfin, le calcul de la correction de blanketing comporte certaines approximations que nous avons déjà mentionnées.

Il semble donc prématuré de conclure : on peut seulement affirmer que toutes

les considérations ci-dessus aboutissent à un modèle dont la température de surface serait de l'ordre de 4 000 à 4 200° plutôt que de l'ordre de 4 800°, comme on l'a admis longtemps.

Manuscrit reçu le 6 juillet 1950.

TABLEAU 1

CALIBRATION ET SPECTRE CONTINU

a) (selon MULDER'S).												
Zone spectrale		Largeurs équivalentes (en mÅ)										
	IR =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 975-3 201	3 230 (1)	—	32	60	80	110	140	165	200	260	310	370
3 201-3 400		—	32	60	80	110	140	165	200	260	310	370
3 400-3 622		—	35	60	80	110	140	165	200	260	310	370
3 623-4 040	4 260 (2)	—	37	60	80	110	140	165	200	260	(310)	(370)
4 040-4 459		—	40	62	83	110	140	175	210	280	(350)	(420)
4 459-4 987	5 040 (2)	—	46	70	94	125	160	200	250	325	(400)	(480)
4 987-5 602		—	55	85	120	160	205	260	320	390	—	—
5 602-6 600	6 000 (2)	—	25	39	55	70	85	100	120	140	(165)	(190)
6 600-7 235	6 700 (3)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7 235-9 770	8 580	14	26	41	52	67	85	99	114	132	—	—
9 770-13 500												

(1) Extrapolation des données de MULDER'S [27].

(2) D'après MULDER'S [27]. Entre parenthèses, valeurs extrapolées.

(3) D'après BABCOCK et MOORE [2].

b) Facteur correctif à apporter à la calibration de MULDER'S, et intensité dans le spectre continu (selon MICHARD).

Zone spectrale	Facteur correctif	$p_{\lambda} = \frac{I}{\int_0^{\infty} I d\lambda}$
2 975- 3 201	$\times 1.6$	$1.21 \cdot 10^{-4}$
3 201- 3 400		
3 400- 3 622		
3 623- 4 040	$\times 1.55$	$1.90 \cdot 10^{-4}$
4 040- 4 459		
4 459- 4 987	$\times 1$	$1.76 \cdot 10^{-4}$
4 987- 5 602		
5 602- 6 600	$\times 1$	$1.38 \cdot 10^{-4}$
6 600- 7 235	$\times 1$	$1.12 \cdot 10^{-4}$
7 235- 9 770	$\times 1$	$0.81 \cdot 10^{-4}$
9 770-13 500		

TABLEAU 2

PROPORTION DU SPECTRE CONTINU ABSORBÉE DANS LES RAIES

		MULDERS [27]	[2]	MESURES SUR RAIES IDENTIFIÉES DE [40] ET [2]	FACTEUR CORRECTIF
		—	—	—	—
2 975- 3 201	Raies IR < 20	19.6 %		9.6 %	2.04
3 201- 3 400		23 %		12.2 %	1.88
3 400- 3 622		25.6 %		17.3 %	1.48
3 623- 4 040		28.7 %		14.6 %	1.97
4 040- 4 459		17.4 %		7.7 %	2.26
4 459- 4 987		9.5 %		6.2 %	1.53
4 987- 5 602		8.0 %		5.7 %	1.40
5 602- 6 600	Toutes raies	2.7 %		1.5 %	1.80
6 600- 7 235		2.15 %	1.5 %	0.94 %	} 1.6
7 235- 9 770		0.8 %	1.75 %	1.10 %	
9 770-13 500		1.83 %	—	0.66 %	

La table fournit le facteur correctif destiné à tenir compte du fait que notre statistique n'a effectivement porté que sur celles des raies des tables qui ont pu être identifiées.

TABLEAU 3

POTENTIELS D'IONISATION (SELON [46])

ÉLÉ- MENT	χ_0	χ_1	ÉLÉ- MENT	χ_0	χ_1	ÉLÉ- MENT	χ_0	χ_1
	(EN VOLTS)			(EN VOLTS)			(EN VOLTS)	
H	13.53		As	10		Dy	(6.82)	
He	24.46	54.14	Se	9.5		Ho		
Li	5.37	75.28	Br	11.80		Er		
Be	9.28	18.12	Kr	13.94	26.4	Tu		
B	8.28	25.0	Rb	4.16	27.3	Yb	(7.06)	
C	11.22	24.27	Sr	5.67	10.98	Cp		
N	14.48	29.47	Y	6.5	12.3	Hf		
O	13.55	34.93	Zr	6.92	13.97	Ta		
F	18.60	34.6	Nb			W		
Ne	21.47	40.9	Mo	7.35		Rl		
			Ma			Os		
Na	5.12	47.0	Ru	(7.5)		Ir		
Mg	7.61	14.96	Rh	7.7		Pt	8.9	
Al	5.96	18.74	Pd	8.3	19.8	Au	9.2	
Si	8.12	16.27	Ag	7.54	21.9	Hg	10.38	18.67
P	10.3	19.8	Cd	8.96	16.84	Tl	6.07	20.3
S	10.3	23.3	In	5.76	18.81	Pb	7.38	15.0
Cl	12.96	22.5	Sn	7.30	14.5			
Ar	15.7	27.72	Sb	(8.35)				
			Te					
K	4.32	31.7	J	8				
Ca	6.09	11.82	X	12.08	(24)			
Sc	6.7	12.8						
Ti	6.81	13.6	Cs	3.87	23.4			
V	6.76	14.1	Ba	5.19	9.96			
Cr	6.74	16.6	La	5.5	(12.5)			
Mn	7.41	15.70	Ce	(6.91)				
Fe	7.83	16.5	Pr	(5.76)				
Co	7.81	17.3	Nd	(6.31)				
Ni	7.61	18.2	II					
			Sm	(6.55)				
Cu	7.68	20.2	Eu					
Zn	9.36	17.9	Gd	(6.65)				
Ga	5.97	20.4	Tb	(6.74)				
Ge	8.09	15.9						

Soit, pour les éléments les plus importants :

$\mathcal{J} < 7.5 v$

Ti, Cr, Mn, Ca

V, Na, Al, Y, K, Li, La,...

$7.5 v < \mathcal{J} < 12.5 v$

Fe, Co, Ni, Mg, Cu, Zn, Si, C...

$\mathcal{J} > 12.5 v$

H, He, O....

TABLEAU 4

RAIES INTENSES DU SPECTRE SOLAIRE

(Intensité Rowland IR > 10)

λ		IR	$\mathcal{E}$ (VOLTS)	W [13] (EN Å)	W [24] (EN Å)
[R R T] [40]					
3 047	Fe	20 N	0.087		(1.85) ⁽¹⁾
3 057	Ti ⁺ Fe	20	0.855		(1.85) ⁽¹⁾
3 059	Fe	20	0.051		(1.85) ⁽¹⁾
3 415	Ni	15	0.025		0.725
3.440	Fe	20	0		1.12
3 441	Fe	15	0.051		1.05
3 515	Ni	12	0.109		0.673
3 524	Ni	20	0.025		0.94
3 565	Fe	12	0.954		1.36
3 570	Fe	20	0.911		1.67
3 581	Fe	30	0.855		2.72
3 608	Fe	20	1.007		1.12
3 619	Fe	20	0.986		1.76
3 631	Fe	15	0.954		1.37
3 647	Fe	12	0.911		1.07
3 720	Fe	40	0		2.62
3 735	Fe	40	0.855		3.34
3 737	Fe	30	0.051		0.99 ⁽³⁾
3 749	Fe	20	0.911		3.06
3 758	Fe	15	0.954		1.26
3 759	Ti ⁺	12 d ?	0.605		0.51 ⁽⁴⁾
3 815	Fe	15	1.478		1.25
3 820	Fe	25	0.855		1.81
3 825	Fe	20	0.911		1.81
3 831	Mg	15	2.700		1.88
3 838	Mg	25	2.705		2.43
3 859	Fe	20	0		1.92
3 886	Fe La ⁺	15	0.051		1.49
3 906	Si	12	1.900		0.895

TABLEAU 4 (*Suite*)

λ		IR	$\mathcal{S}$ (VOLTS)	W [13] (EN Å)	W [24] (EN Å)
3 922	Fe	12	0.051		0.530
3 933	Ca ⁺ (K)	1 000	0	19.170	
3 944	Al	15	0		0.622
3 962	Al	20	0.014		0.326
3 968	Ca ⁺ (H), H _e	700	Ca : 0 H : 10.155	15.240	
4 045	Fe	30	1.478	1.414	1.14
4 063	Fe	20	1.551	0.990	0.743
4 071	Fe	15	1.601	0.860	0.713
4 101	H _{δ}	40 N	10.155		2.65
4 143	Fe	15	1.551	0.515	
4 226	Ca	20 d	0	1.430	
4 271	Fe	15	1.478		0.89
4 340	H _{γ}	20 N	10.155		2.43
4 383	Fe	15	1.478		1.11
4 861	H _{β}	30	10.155		2.75
5 167	Mg	15	2.697	0.860	
5 172	Mg	20	2.700	1.405	
5 183	Mg	30	2.705	1.770	
5 889	Na(D2)	30	0	0.906	
5 895	Na(D1)	20	0	0.636	
6 162	Ca	15	1.895		0.214 ⁽⁴⁾
6 562	H _{α}	40	10.155		2.59
8 498	Ca ⁺ (²)	12	1.685	1.250	1.28
8 542	Ca ⁺ (²)	16	1.693	3.295	3.08
8 662	Ca ⁺ (²)	15	1.685	2.500	2.59
[B M] [2]					
7 699	K	11	0		0.147 ⁽⁴⁾
8 183	Na	11 N	2.09		0.253 ⁽⁴⁾
8 194	Na	12 N	2.10		0.319 ⁽⁴⁾
8 498	Ca ⁺ (²)	20	1.69	1.250	1.28
8 542	Ca ⁺ (²)	25	1.69	3.295	3.08
8 662	Ca ⁺ (²)	23	1.69	2.500	2.59

TABLEAU 4 (*Suite*)

λ		IR	(VOLTS)	W [13] (EN Å)	W [24] (EN Å)
8 688	Fe	11 N	2.17		0.263 ⁽⁴⁾
8 806	Mg	14	4.33		(0.75) ⁽¹⁾
9 088	Fe C	11 nl	2.83		(0.25) ⁽¹⁾
10 049	H	50 NN	12.04		(7.1) ⁽¹⁾
10 585	Si	12	4.93		(0.35) ⁽¹⁾
10 691	C	12	7.49		(0.35) ⁽¹⁾
10 749	Si	12	4.91		(0.35) ⁽¹⁾
10 827	Si	12	4.93		(0.35) ⁽¹⁾
10 938	H	50 NN	12.04		(7.1) ⁽¹⁾
11 611	Si	15 ns	6.23		(0.90) ⁽¹⁾
13 166	(C)	15	8.73		(0.90) ⁽¹⁾
12 188	H	(20)	12.04		(1.85) ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Valeurs grossièrement extrapolées.

⁽²⁾ Ces raies ont des IR différentes sur les deux atlas. Ce fait explique pourquoi les raies 7 699, 8 183... sont d'intensité IR < 10 sur les RRT.

⁽³⁾ Raie blendant la raie 3 735 : intensité IR trop forte.

⁽⁴⁾ W anormalement faibles sur l'atlas, comparativement aux intensités Rowland.

TABLEAU 5

CLASSIFICATION DES RAIES SOLAIRES (AU CENTRE DU DISQUE)

A) Raies d'atomes neutres ($\mathcal{E} \neq 0$)

λ	$(J < 7.5 \text{ v})$	$(7.5 < J < 12.5 \text{ v})$	$(J > 12.5 \text{ v})$		
2 975-3 622	$J - \mathcal{E} = 0 \rightarrow 2.5$	$w = 0$	$0 \rightarrow 2.75$	0	
	2.5 $\rightarrow$ 5	4.21	2.75 $\rightarrow$ 5.25	11.81	0
(3 230)	5 $\rightarrow$ 7.5	15.23	5.25 $\rightarrow$ 6.25	18.60	0
	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	30.62	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	47.75	0
3 623-4 459	0 $\rightarrow$ 2.5	0	0 $\rightarrow$ 2.75	0.43	0
	2.5 $\rightarrow$ 5	25.31	2.75 $\rightarrow$ 5.25	53.10	5.88
(4 260)	5 $\rightarrow$ 7.5	33.38	5.25 $\rightarrow$ 6.25	59.63	0
	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	64.23	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	30.77	0
4 459-5 602	0 $\rightarrow$ 2.5	0	0 $\rightarrow$ 2.75	0	0
	2.5 $\rightarrow$ 5	9.86	2.75 $\rightarrow$ 5.25	43.87	2.75
(5 040)	5 $\rightarrow$ 7.5	12.05	5.25 $\rightarrow$ 6.25	0	0
	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	0	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	0	0
5 602-6 600	0 $\rightarrow$ 2.5	0	0 $\rightarrow$ 2.75	0.23	0
	2.5 $\rightarrow$ 5	4.98	2.75 $\rightarrow$ 5.25	13.24	2.59
(6 000)	5 $\rightarrow$ 7.5	1.37	5.25 $\rightarrow$ 6.25	5.34	0
	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	0.76	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	0	0
6 600-7 235	0 $\rightarrow$ 2.5	0	0 $\rightarrow$ 2.75	0.68	0
	2.5 $\rightarrow$ 5	1.13	2.75 $\rightarrow$ 5.25	5.48	0
(6 700)	5 $\rightarrow$ 7.5	0.37	5.25 $\rightarrow$ 6.25	1.68	0
	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	0.08	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	0	0
7 235-13 500	0 $\rightarrow$ 2.5	0.85	0 $\rightarrow$ 2.75	17.17	26.37
	2.5 $\rightarrow$ 5	2.70	2.75 $\rightarrow$ 5.25	23.12	0
	5 $\rightarrow$ 7.5	1.15	5.25 $\rightarrow$ 6.25	4.98	0
(8 580)	> 7.5	0	6.25 $\rightarrow$ 7.25	0	0
			7.25 $\rightarrow$ 7.75	0	0

Raies d'atomes neutres : raies de résonance ($\mathcal{E} = 0$)

3 230	5.04	7.78
4 260	9.96	9.39
5 040	0.68	0.87
6 000	1.59	0
6 700	0	0
8 580	0.15	0

Les intensités sont en Å, les potentiels en volts.

TABLEAU 5

B) Raies d'atomes ionisés ($\mathcal{E} \neq 0$)

λ		$\mathcal{J} < 7.5 \text{ v}$	$7.5 < \mathcal{J} < 12.5$	$\mathcal{J} < 12.5$
	$\mathcal{E} = 0 \rightarrow 0.5 \text{ v}$	$w = 28.19$	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	17.20	3.20	0
3 230	$1.5 \rightarrow 2.5$	14.49	2.78	0
	$2.5 \rightarrow 5$	6.02	1.39	0
	> 5	0	0	0
	$0 \rightarrow 0.5$	6.99	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	17.78	0	0
4 260	$1.5 \rightarrow 2.5$	6.82	0	0
	$2.5 \rightarrow 5$	5.16	2.70	0
	> 5	0	0	0
	$0 \rightarrow 0.5$	0.07	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	2.94	0	0
5 040	$1.5 \rightarrow 2.5$	2.39	0	0
	$2.5 \rightarrow 5$	1.45	3.48	0
	> 5	0	0	0
	$0 \rightarrow 0.5$	0	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	0.57	0	0
6 000	$1.5 \rightarrow 2.5$	0.12	0	0
	$2.5 \rightarrow 5$	0	0.54	0
	> 5	0	0.12	0
	$0 \rightarrow 0.5$	0	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	0	0.07	0
6 700	$1.5 \rightarrow 2.5$	0	0	0
	$2.5 \rightarrow 5$	0	0.30	0
	> 5	0	0.07	0
	$0 \rightarrow 0.5$	0	0	0
	$0.5 \rightarrow 1.5$	0	0	0
8 580	$1.5 \rightarrow 2.5$	11.73	0	0
	$2.5 \rightarrow 5$	0	0.36	0
	> 5	0	0.11	0.21

Raies d'atomes ionisés : raies de résonance ($\mathcal{E} = 0$)

3 230	4.66	0.11	0
4 260	36.52	0	0
5 040	0.69	0	0
6 000	0	0	0
6 700	0	0	0
8 580	0	0	0

Les intensités sont en Ångströms, les potentiels en volts.

TABLEAU 6

LARGEURS ÉQUIVALENTES AU CENTRE DU DISQUE ET SUR LE DISQUE TOTAL

<i>Atomes neutres</i>									
$J - \mathcal{E} = 2 \text{ v}$		2.5 v	4 v	4.2 v	5.75 v	6.75 v	7.5 v		
—	—	—	—	—	—	—	—	—	
3 230 Å	0.94	0.94	0.95	0.95	0.97	0.97		0.98	
4 260 Å	0.85	0.86	0.89	0.90	0.94	0.97		0.98	
5 000 Å	0.87	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94		0.96	
6 000 Å	0.92	0.92	0.91	0.91	0.90	0.89		0.89	
6 700 Å	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94		0.94	
8 580 Å	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93		0.93	
<i>Atomes ionisés</i>									
$J + \mathcal{E} = 7.4 \text{ v}$		8 v	8.4 v	9 v	10 v	10.7 v	11.7 v	13 v	14 v
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3 230 Å	1.00	0.99	0.98	0.96	0.93	0.91	0.88	0.85	0.83
4 260 Å	1.04	1.00	0.96	0.92	0.85	0.82	0.76	0.71	0.67
5 000 Å	1.12	1.05	1.01	0.97	0.90	0.87	0.83	0.78	0.75
6 000 Å	1.22	1.12	1.08	1.01	0.93	0.88	0.83	0.78	0.75
6 700 Å	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
8 580 Å	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04

La table fournit le rapport $\frac{W(0)}{w(0, \mu = 1)}$.

TABLEAU 7

LA CORRECTION DE BLANKETING

τ_{5000}		.05	.1	.15	.2	.3
$= 0$						
$\frac{\Delta T}{T}$	- 0.072	- 0.024	+ 0.010	+ 0.0365	+ 0.0185	+ 0.0092
τ_{5000}	$= .4$	.5	.6	.8	1.	
$\frac{\Delta T}{T}$	+ 0.0053	0.0033	0.0023	0.0016	0.0012	
τ_{5000}	$= 1.5$	2.	2.5	3.		
$\frac{\Delta T}{T}$	0.00072	0.00050	0.00041	0.00031		

TABLEAU 8

LA CORRECTION DE RUGOSITÉ

λ	T_0	T_0 d'après courbes d'assombrissement extrapolées	τ_{5000}/τ_λ	$\tau_{5000} = 0,17 \left(\frac{\tau_{5000}}{\tau_\lambda} \right)$
4 560	4 751	4 840	1.037	0.176
4 810	4 815	4 900	1.037	0.176
5 010	4 830	4 875	1.000	0.170
5 062	4 866	4 855	1.000	0.170
5 340	5 078	4 870	0.933	0.159
5 955	4 857	4 850	0.903	0.154
6 040	4 813	4 835	0.875	0.149
6 700	4 756	4 825	0.824	0.140
6 702	4 914	4 820	0.875	0.149
6 990	4 740	4 815	0.778	0.132
8 580	4 836	4 750	0.651	0.111
10 080	4 800	4 760	0.667	0.113
12 250	4 922	4 950	1.076	0.183
16 550	5 431	5 340	1.927	0.328
20 970	5 308	5 280	1.620	0.275

(valeur portées
sur la figure 7)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABBOTT, *Smiths. Ann.*, **3** (1913), **4** (1922).
- [2] BABCOCK, MOORE, *The solar spectrum* (6 600-13 495). Wash., (1947).
- [3] BARBIER D., *Ann. Astr.*, **9** (1946), 173.
- [4] BUSBRIDGE, *M. N.*, **101** (1941), 26.
- [5] CHALONGE D., *Physica*, **12** (1946), 721.
- [6] CHALONGE D., KOURGANOFF V., *Ann. Astr.*, **9** (1946), 69.
- [7] CHALONGE D., CANAVAGGIA R., *Ann. Astr.*, **9** (1946), 143.
- [8] CHANDRASEKHAR S., *M. N.*, **96** (1936), 21.
- [9] CHANDRASEKHAR S., MÜNCH G., *Ap. J.*, **104** (1946), 446.
- [10] DAMGAARD A., Communication personnelle.
- [11] DENISSE J. F., Communication personnelle.
- [12] EVANS D. S., *M. N.*, **107** (1947), 403.
- [13] HOUTGAST J., *Thèse*, Utrecht (1942).
- [14] HUNAERTS J., *Ann. Astr.*, **10** (1947), 237.
- [15] DE JAGER K., Communication personnelle.
- [16] KING R. B., KING A. S., *Ap. J.*, **87** (1938), 40.
- [17] KRAT T. W., *Pulk. Publ.*, **17** (1948), 137.

- [18] LUNDBLAD R., *Ap. J.*, **58** (1923), 113.
- [19] MENZEL et coll., *Ap. J.*, **87** (1938), 81.
- [20] MICHARD R., *B.A.N.*, **11**, (1950), 227 ; *Contr. I. A. P.*, B. 44 *C. R. Acad. Sci.*, **230** (1950), 516.
Contr. I. A. P., A. 58.
- [21] MICHARD R., *Ann. Astr.*, **12** (1949), 143.
- [22] MILNE E. A., *Phil. Trans. R. Soc.*, A **223** (1922), 201 ; *Observatory*, **51** (1928), 88.
- [23] MINNAERT M. *B.A.N.*, **10** (1948), 339, 399 ; **11** (1949), 51.
- [24] MINNAERT, MULDER G. W., HOUTGAST J., *Photometric Atlas of the solar spectrum*.
- [25] MINNAERT M., VAN DIGGELEN, V. d. HOVEN, *B.A.N.*, **11** (1949), 55.
- [26] MOLL, BURGER, V. d. BILT, *B.A.N.*, **3** (1925), 83.
- [27] MULDER G. W., *Z. f. Ap.*, **11** (1936), 143.
- [28] MÜNCH G., *Ap. J.*, **104** (1946), 87.
- [29] PANNEKOEK A., *Publ. Obs. Amsterdam*, n° 4.
- [30] PECKER J. C., Parties I, III, IV de cette thèse.
- [31] PECKER J. C., *Ann. Astr.*, **12** (1949), 1 ; *contr. I. A. P.*, B 33.
- [32] PECKER J. C., *B.A.N.*, **11** (1949), 43 ; *contr. I. A. P.*, B 27.
- [33] PECKER C., PECKER J. C., *Ann. Astr.*, **12** (1949), 197 ; *contr. I. A. P.*, B 38.
- [34] PEYTURAUX R., *C. R. Acad. Sci.*, **230** (1950), 368 ; *contr. I. A. P.*, A 53.
- [35] PLASKETT J. J., *M. N.*, **101** (1941), 3.
- [36] RAUDENBUSCH, *Astr. Nachr.*, **263** (1938), 300.
- [37] REDMAN R. O., *M. N.*, **103** (1943), 173.
- [38] REIZ A., *Ark. Mat. Astr. Fys.*, Suède, **29** (1943), 1.
- [39] RUDKJØBING M., *Ann. Astr.*, **9** (1946), 7.
- [40] Revision of Rowland's preliminary table. *Publ. Carn. Inst. Wash.*, 396 (papers of Mt. Wilson, Obs., **3** (1928).
- [41] STRÖMGREN B., *Astron. J.*, **53** (1948), 107.
- [42] THOMAS R. N., *Ap. J.*, **108** (1948), 130, 142.
- [43] UNSÖLD A., *Ann. Phys.*, **3** (1948), 124.
- [44] UNSÖLD A., *Z. f. Astr.*, **24** (1948), 363.
- [45] UNSÖLD A., Communication personnelle.
- [46] UNSÖLD A., *Physik der Sternatmosphären*, Springer, Berlin.
- [47] UNSÖLD A., STRUVE O., *Ap. J.*, **110** (1949), 455.
- [48] WEMPE, *Astr. Nachr.*, **275** (1947), 97.
- [49] WRIGHT K. O., *Ap. J.*, **99** (1944), 249.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La spectroscopie dans le domaine des ondes hertziennes et
la structure du noyau.

Vu et approuvé :

Paris, le 10 Mai 1950

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
JEAN SARRAILH.



